Lösungen 10

1. Für

$$\mathbf{a}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{a}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{a}_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und $A := (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ gelten welche der folgenden Aussagen?

$\surd$ (a) $\det(A) = 0$.

Richtig, die erste Zeile ist das (-1)-fache der zweiten. Addiert man die erste zur zweiten Zeile (eine Operation die die Determinante unverändert lässt) so erhält man eine Matrix mit einer Nullzeile und somit $\det(A) = 0$.

(b) Der Rang von A ist 3.

Falsch, für eine 3×3-Matrix gilt $\text{Rang}A = 3 \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$. Alternativ kann man auch argumentieren, dass beim Gauss'schen Eliminationsverfahren gleich im ersten Schritt eine Nullzeile entsteht und daher der Rang nicht maximal sein kann.

$\surd$ (c) Das Gleichungssystem $A\mathbf{x} = 0$ hat nichttriviale Lösungen.

Richtig, alle Vielfachen von $\mathbf{x} = (3, -2, 1)^T$ sind Nulllösungen. Alternativ kann man benutzen, dass $\det(A) = 0$ äquivalent zu dieser Aussage ist.

(d) Das Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat genau eine Lösung.

Falsch, dies wäre gleichbedeutend mit $\det(A) \neq 0$ ($\Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist für beliebige $\mathbf{b}$ eindeutig lösbar). Da $\det(A) = 0$ hat das Gleichungssystem entweder keine oder unendlich viele Lösungen aber nie genau eine (für das gegebene $\mathbf{b}$ existieren unendlich viele Lösungen).

$\surd$ (e) Die Lösbarkeit von $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ hängt von der Wahl von $\mathbf{v}$ ab.

Richtig. Da die Matrix Rang 2 hat bildet die Menge der Vektoren $\mathbf{v}$ für die eine (und dann gleich unendlich viele) Lösung existert eine Ebene im $\mathbb{R}^3$. Für alle $\mathbf{v}$ die nicht in dieser Ebene liegen (zumindest optisch sind das die meisten) existiert keine Lösung.

(f) Die Matrix A hat eine Inverse.

Diese Aussage ist äquivalent zum zweiten und zum drittletzten Punkt und somit falsch.

Siehe auch K. Nipp/D. Stoffer, Lineare Algebra, 5. Auflage 2002, Abschnitt 3.4 Determinanten und lineare Gleichungssysteme. **Wichtig**, hier wie dort gelten die Aussagen nur für quadratische Matrizen.

2. [Prüfungsaufgabe, Frühling 07] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & b & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 7 & -1 & c \\ 5 & 1 & d & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $\det A$.

b) Für welche Werte der Parameter a, b, c, d ist die Matrix A singulär?

Lösung:

a) Wir betrachten im Folgenden

$$A^T = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & b & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 2 \end{pmatrix}$$

anstelle von A, da $\det A = \det A^T$ und $\det A^T$ hier einfacher zu berechnen ist.
Erste Variante: Aus K. Nipp/D. Stoffer, Lineare Algebra, 5. Auflage 2002, Lemma 3.7 wissen wir, dass für quadratische Matrizen der Gestalt

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

gilt: $\det M = \det A \cdot \det C$. Dies kann man natürlich rekursiv anwenden. Zerlege

$$A^T = \begin{pmatrix} a & B \\ 0 & C \end{pmatrix}, \text{ wobei } C = \begin{pmatrix} D & E \\ 0 & F \end{pmatrix}, \text{ mit}$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & b & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ c & 2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} \det A = \det A^T &= a \cdot \det C = a \cdot \det D \cdot \det F \\ &= a \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & b \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ c & 2 \end{vmatrix} \\ &= a(-1)(-6+b)(-2-c) = a(b-6)(c+2) \end{aligned}$$

Zweite Variante (mit Gauss):

$$\det A = \det\, A^T = \begin{vmatrix} a & 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & b & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & -2 & b & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & b-6 & 11 & -10 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 2 \end{vmatrix} = (-1)^2\cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & b-6 & 11 & -10 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^2\cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & b-6 & 11 & -10 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2+c \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^2 \cdot a \cdot (-1) \cdot (b-6) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (c+2) = abc + 2ab - 6ac - 12a,$$

wie erwartet.

b) A ist singulär, wenn $\det A = 0$, also wenn $a = 0$, $b = 6$ oder $c = -2$.

3. *Cramersche Regel, 1750*: Sei A eine reguläre $n \times n$-Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ ein Spaltenvektor. Ersetzt man die k-te Spalte von A durch b, erhält man eine Matrix A_k. Beweisen Sie, dass die Lösung von $Ax = b$ durch

$$x_k = \frac{\det A_k}{\det A}$$

gegeben ist.

Bemerkung: Bezüglich des Rechenaufwandes ist die Cramersche Regel eine im Vergleich zum Gaussverfahren ineffiziente Methode zur Lösung linearer Gleichungssysteme.

Lösung:

Wenn wir die i-te Spalte von A mit $a^{(i)}$ bezeichnen, können wir die Gleichung $b = Ax$ als $b = \sum_{i=1}^{n} x_i a^{(i)}$ umschreiben. Folglich gilt

$$\begin{aligned}
\det A_k &= \det(a^{(1)} \ldots a^{(k-1)}\ b\ a^{(k+1)} \ldots a^{(n)}) \\
&= \det(a^{(1)} \ldots a^{(k-1)} \sum_{i=1}^{n} x_i a^{(i)}\ a^{(k+1)} \ldots a^{(n)}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \det(a^{(1)} \ldots a^{(k-1)}\ a^{(i)}\ a^{(k+1)} \ldots a^{(n)}) \\
&= x_k \cdot \det A,
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aus der Gleichung

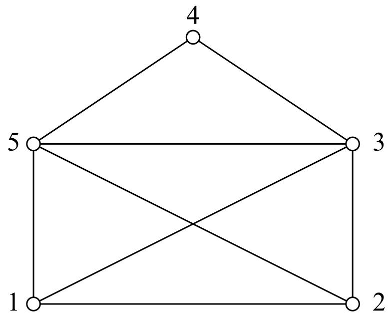
$$\det(a^{(1)} \ldots a^{(k-1)}\ a^{(i)}\ a^{(k+1)} \ldots a^{(n)}) = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \neq k \text{ (zwei gleiche Spalten);} \\ \det A, & \text{falls } i = k \end{cases}$$

folgt.

4. Ein Graph G mit den Knoten $1, 2, \ldots, n$ wird vollständig durch seine Adjazenzmatrix A^G beschrieben:

$$(A^G)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i \text{ mit } j \text{ durch eine Kante verbunden ist;} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispielsweise gehört zum Graph G :



die Adjazenzmatrix

$$A^G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sei d_i der Grad des Knotens i, d.h. die Anzahl seiner Nachbarn, und

$$D^G = \operatorname{diag}(d_1\, d_2\, \ldots\, d_n).$$

Dann heisst $L^G := D^G - A^G$ Laplace-Operator auf G.

a) Zeigen Sie für beliebige G, dass $\det L^G = 0$ gilt.

b) Kirchhoffs Matrix-Tree-Theorem besagt, dass jeder Kofaktor von L^G die Anzahl der G aufspannenden Teilbäume ist. Man berechne diese Anzahl für das obige Beispiel.

Lösung:

a) Nach Definition gilt

$$d_j = \sum_{i=1}^{n} (A^G)_{ij}.$$

Folglich ist die Summe der Zeilen von L^G gleich 0, d.h. $(1, 1, \ldots, 1)^T$ ist eine nichttriviale Lösung von $L^G x = 0$. Daraus folgt, dass L^G singulär ist.

b) In diesem Fall gilt

$$L^G = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Nach Kirchhoffs Matrix-Tree-Theorem reicht es, irgendeinen Kofaktor auszurechen. Um mit einer Untermatrix mit möglichst vielen Nulleinträgen zu arbeiten, wählen wir den $(3,3)$-Kofaktor $\tilde{a}_{33}$ aus. Es gilt

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{33} &= (-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & -3 & 11 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 40.\end{aligned}$$

Folglich hat G genau 40 aufspannende Bäume.