Korollar 1.4

Ein LGS $Ax = b$ ist genau dann für alle b lösbar, wenn $r = m$ gilt.

Spezialfall: Anzahl Gleichungen = Anzahl Unbekannte

Korollar 1.6

Sei $m = n$. Das LGS $Ax = b$ ist genau dann eindeutig lösbar, wenn das LGS für beliebiges b lösbar ist.

Korollar 1.7

Sei $m = n$. Das LGS $Ax = b$ ist genau dann für beliebiges b lösbar, wenn das zugehörige homogene LGS $Ax = 0$ nur die triviale Lösung besitzt.

Matrizen

Eine $m \times n$-Matrix ist

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Also m Zeilen und n Spalten.

Notation: $a_{ij} = (A)_{ij}$ ist das Element in der Zeile i und der Spalte j.

Merksatz: **Z**eilenindex **z**uerst, **S**paltenindex **s**päter.

Spezielle Matrizen

Nullmatrix 0

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Obere und untere Dreiecksmatrix oder: Rechts- und Linksdreiecksmatix

$$R = \begin{pmatrix} * & * & * & \dots & * \\ 0 & * & * & \dots & * \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & * & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \\ * & * & \dots & * & 0 \\ * & * & \dots & * & * \end{pmatrix}$$

Diagonalmatrix

$$D = \mathrm{diag}(d_{11}, \ldots, d_{nn}) = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix $\mathbb{I}$

$$\mathbb{I} = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1)$$

Gelegentlich schreibt man $\mathbb{I}_n$ um anzudeuten, dass es sich um eine $n \times n$-Matrix handelt.

Spaltenvektor $n \times 1$, Zeilenvektor $1 \times n$

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}, \qquad z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{pmatrix}$$

Man spart sich den Spalten- respektive den Zeilenindex.

Transponierte A^t einer Matrix A

$$(A^t)_{ij} := (A)_{ji}$$

Beispiel $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \implies A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$

Symmetrische und antisymmetrische Matrizen

- A heisst **symmetrisch**, wenn $A^t = A$.
- A heisst **antisymmetrisch** oder **schiefsymmetrisch**, wenn $A^t = -A$.

Repetition
Lineare Algebra
Zeilenstufenform
Matrizen
Operationen
Summenkonvention
Rechenregeln

Beispiel einer **symmetrischen** Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 5 & 9 & 3 \\ -2 & 3 & 7 \end{pmatrix} = A^T$$

Beispiel einer **antisymmetrischen** Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = -A^T$$

Beachte: Wegen $a_{ii} = -a_{ii}$ müssen auf der Diagonale einer antisymmetrischen Matrix lauter Nullen stehen.

Überlege: Sei A eine 3×3-Matrix.

- Wieviele freie Parameter hat das LGS $A^T = A$?
- Wieviele freie Parameter hat das LGS $A^T = -A$?

Operationen mit Matrizen

Addition

Sind A und B $m \times n$-Matrizen, so auch die Summe $A + B$:

$$(A + B)_{ij} := (A)_{ij} + (B)_{ij}$$

Multiplikation mit einem Skalar

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Ist A eine $m \times n$-Matrix, so auch das Produkt αA:

$$(\alpha A)_{ij} := \alpha (A)_{ij}$$

Produkt zweier Matrizen

Sei A eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times p$-Matrix, so ist das Produkt AB eine $m \times p$-Matrix:

$$(AB)_{ij} := \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik} (B)_{kj}$$

Notation

Einsteinsche Summenkonvention

Über doppelt auftretende Indizes innerhalb eines Produkts wird summiert.

Beispiel Matrizenprodukt: Sei A eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times p$-Matrix, so schreibt man statt

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik}(B)_{kj}$$

unter Weglassung des Summenzeichens kurz

$$(AB)_{ij} = (A)_{ik}(B)_{kj}$$

Rechenregeln

Im folgenden Satz nehmen wir an, dass alle vorkommenden Operationen für die Matrizen A, B, C, D definiert sind.

Satz

- Kommutativgesetz Addition: $A + B = B + A$
- Assoziativgesetz Addition: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- Assoziativgesetz Multiplikation: $(AB)C = A(BC)$
- Distributivgesetz: $(A + B)C = AC + BC$ und $A(C + D) = AC + AD$

Ferner für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

ACHTUNG: Im Allgemeinen ist $AB \neq BA$.