

1

Grundstrukturen

1.1 Zur mathematischen Logik

Einige nützliche Zeichen

Die sogenannte mathematische Logik ist ein **Kalkül**, d.h. ein Gebäude von Rechenregeln, dessen Objekte \mathcal{A} bzw. $\mathcal{A}(x)$ nicht Zahlen oder Funktionen, sondern Aussagen, Aussageformen und deren Verknüpfungen sind.

Eine **Aussage** ist eine Behauptung oder eine Formel, die so, wie sie da steht, entweder wahr ist oder falsch.

Bsp: “Die Basiswinkel von gleichschenkligen Dreiecken sind gleich”, “ $10^{100}+1$ ist eine Primzahl”, “Camel ist eine Automarke”.

Gegebene Aussagen \mathcal{A} , \mathcal{B} können durch die logischen Operationen

\implies	hat zur Folge
\iff	gilt genau dann, wenn
\vee	oder (gemeint ist: oder/und)
\wedge	und
\neg	nicht

zu komplizierteren Aussagen verbunden werden. Es geht dann zum Beispiel darum, den “Wahrheitswert” eines so erhaltenen Ausdrucks zu berechnen, wenn die Wahrheitswerte der darin auftretenden Variablen \mathcal{A} , \mathcal{B} , ... gegeben sind. Ein derartiger logischer Kalkül wird zum Beispiel beim Aufbau eines Systems, das komplizierte mathematische Sachverhalte verarbeiten soll, dringend benötigt.

Eine **Aussageform** ist ein Text oder eine Formel mit einer freien Variablen x , die für jeden Wert x eines vereinbarten Grundbereichs in eine wahre oder in eine falsche Aussage übergeht.

Bsp: Die folgenden Aussageformen beziehen sich auf reelle Zahlen x, y und natürliche Zahlen n :

$$\begin{aligned}x^2 - 5x + 6 &= 0, \\x^2 + y^2 &< 1, \\1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} &= \frac{1 - x^n}{1 - x}.\end{aligned}$$

Im Zusammenhang mit Aussageformen treten weitere neuartige Zeichen auf:

\forall	für alle
\exists	es gibt
$\exists!$	es gibt genau ein
\nexists	es gibt kein

Diese sogenannten **Quantoren** erlauben Aussagen der folgenden Art:

$$\begin{aligned}\text{Bsp: } \quad \forall n \geq 1 : \quad 1 + 2 + \dots + n &= \frac{n(n+1)}{2}, \\ \exists! t \in [0, 2] : \quad \cos t &= 0, \\ \forall x \forall y : \quad xy = 0 &\Leftrightarrow (x = 0) \vee (y = 0).\end{aligned}$$

Anstelle des \forall -Zeichens verwenden wir auch die folgende Klammerschreibweise, um den Geltungsbereich einer Formel anzugeben:

$$x^2 \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ist aus dem Zusammenhang klar, daß eine Formel “für alle betrachteten x ” gilt, so kann das \forall -Zeichen oder die Angabe des Geltungsbereichs auch weggelassen werden.

$$\text{Bsp: } \quad x > y > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{y}.$$

Für unsere Zwecke brauchen wir von der mathematischen Logik nur die angegebenen Zeichen als praktische Abkürzungen sowie vor allem Klarheit über einige wenige Grunderfahrungen (s.u.).

Eine Bemerkung zum Thema “Gleichheitszeichen”. In den drei Gleichungen

$$x^2 - 12x + 35 = 0, \quad e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}, \quad \sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

hat das Zeichen ‘=’ ganz unterschiedliche Bedeutung. Die erste ist eine “Bestimmungsgleichung” und definiert eine gewisse Lösungsmenge. Die zweite ist eine “Definitionsgleichung” und legt das Symbol e als Abkürzung für den

rechtsstehenden Ausdruck fest. Die dritte schliesslich ist eine “Identität”; sie gilt für alle t des vereinbarten Grundbereichs (z.B. \mathbb{R}). Um die intendierte Bedeutung eines Gleichheitszeichens auch graphisch sichtbar zu machen, verwenden wir in diesem Text die folgenden Schreibweisen:

Wird einer noch freien Variablen ein bestimmter Wert zugewiesen oder wird für ein umständlich dargestelltes Objekt (das Definiens) ein bestimmter Bezeichner (Definiendum) vereinbart, so benutzen wir in der Regel das Zeichen $:=$ bzw. \doteq . Der Doppelpunkt steht dabei auf der Seite des Definiendums. Diese Schreibweise wurde für das Programmieren erfunden und hat sich auch im mathematischen Gebrauch als äußerst praktisch erwiesen.

Bsp:

$$\begin{aligned} x &:= 3, \\ f(t) &:= \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} &\doteq e. \end{aligned}$$

Im zweiten Beispiel wird nicht etwa der Variablen t , sondern der Funktionsvariablen f ein bestimmter “Wert” erteilt: f ist jetzt nicht mehr irgendeine Funktion, sondern die bestimmte, durch den angeschriebenen Ausdruck definierte Funktion (wobei sich der Definitionsbereich aus dem Zusammenhang ergeben sollte).

Gilt eine Gleichung für alle Werte der darin auftretenden Variablen, so benutzen wir gelegentlich das Zeichen \equiv .

Bsp:

$$\cos^2 t + \sin^2 t \equiv 1.$$

Das Zeichen \doteq schließlich steht für die Vorstellung “ist angenähert gleich”. Was das mathematisch genau bedeutet, ist in jedem Fall wieder anders und bleibt ungesagt.

Bsp:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &\doteq 1-x \quad (x \doteq 0), \\ n! &\doteq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Einige logische Grundtatsachen

Nun zu den angekündigten Grunderfahrungen!

Ein mathematischer Sachverhalt kann typischerweise die Gestalt

$$\mathcal{A}$$

annehmen; dabei ist \mathcal{A} eine Aussage.

Bsp: $\mathcal{A}_1 :=$ "Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180° ."
 $\mathcal{A}_2 :=$ " $\sqrt{2}$ ist irrational."

Unter einem **direkten Beweis** der Aussage \mathcal{A} versteht man folgendes: Ausgehend von einer Liste (stillschweigend oder ausdrücklich) vereinbarter Axiome wird nach bestimmten Schlußweisen eine Kette von richtigen Aussagen aufgeschrieben, deren letztes Glied die Behauptung darstellt.

① Zum Beweis der Aussage \mathcal{A}_1 benötigen wir das folgende Axiom: Wechselwinkel an Parallelen sind gleich (Fig. 1.1.1). \mathcal{A}_1 ergibt sich dann unmittelbar aus der Figur 1.1.2. Der Leser ist aufgefordert, die einzelnen Sätze der Schlußkette selber zu formulieren. \circ

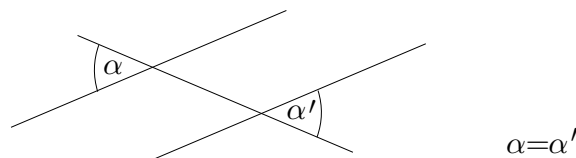


Fig. 1.1.1

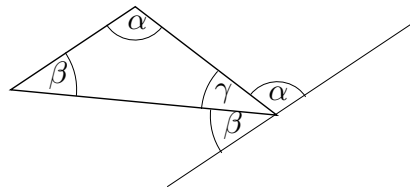


Fig. 1.1.2

Bei einem **indirekten Beweis** der Aussage \mathcal{A} nimmt man außer den vereinbarten Axiomen zusätzlich an, \mathcal{A} sei falsch — in anderen Worten: Man fügt $\neg\mathcal{A}$ als Axiom hinzu und kommt nach einer Kette von erlaubten Schlüssen zu einer offensichtlich falschen Aussage, etwa zu " $1 = 0$ ". Hieraus schließt man, daß das zugrundegelegte (und als widerspruchsfrei angenommene) Axiomensystem mit dem Zusatzaxiom $\neg\mathcal{A}$ nicht verträglich ist. Nach dem "Prinzip des ausgeschlossenen Dritten" muß daher \mathcal{A} zutreffen.

② Wir nehmen zusätzlich zu den Regeln der Arithmetik an, \mathcal{A}_2 sei falsch. Es gibt dann zwei ganze Zahlen p und q mit $\sqrt{2} = p/q$, wobei wir nach Kürzen annehmen dürfen, p und q seien nicht beide gerade. Es folgt $p^2 = 2q^2$, somit

ist jedenfalls p gerade: $p = 2r$, und folglich q ungerade. Wir haben jetzt $4r^2 = 2q^2$ bzw. $2r^2 = q^2$. Hier ist die linke Seite gerade, die rechte ungerade — ein Widerspruch. \circ

Mathematische Sachverhalte kommen zweitens in der Form einer sogenannten **Implikation** daher:

$$\mathcal{A} \implies \mathcal{B}; \quad (1)$$

dabei sind \mathcal{A} und \mathcal{B} Aussagen. Interpretation: Vielleicht trifft \mathcal{A} zu, vielleicht nicht. Sicher bzw. bewiesen ist nur: Falls \mathcal{A} zutrifft, so trifft auch \mathcal{B} zu. \mathcal{B} kann aber ohne weiteres wahr sein und \mathcal{A} gleichzeitig falsch. In anderen Worten: Die **Umkehrung** von (1), also die Implikation

$$\mathcal{B} \implies \mathcal{A},$$

ist mitnichten bewiesen und auch im allgemeinen falsch.

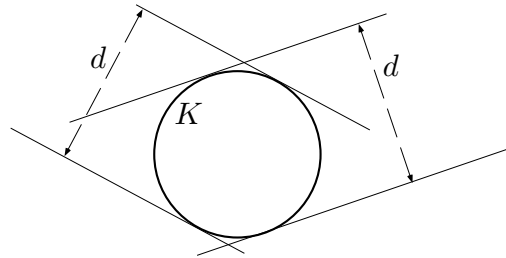


Fig. 1.1.3

③ Es geht um konvexe ebene Bereiche K (Fig. 1.1.3). Ein derartiger Bereich besitzt in jedem Randpunkt eine sogenannte **Stützgerade**; das ist eine Gerade, die K trifft, aber nicht zerlegt. Betrachte die beiden folgenden Aussagen:

\mathcal{A} : K ist eine Kreisscheibe.

\mathcal{B} : Der Abstand zwischen parallelen Stützgeraden von K ist konstant.

Offensichtlich gilt $\mathcal{A} \implies \mathcal{B}$. Die Umkehrung $\mathcal{B} \implies \mathcal{A}$ ist aber falsch, denn es gibt **Bereiche konstanter Breite**, die nicht Kreise sind, zum Beispiel das sogenannte **Reuleaux-Dreieck** (Fig. 1.1.4). \circ

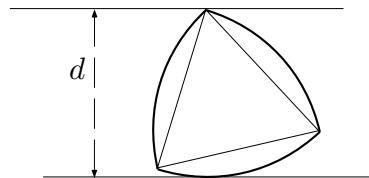


Fig. 1.1.4

Logisch äquivalent zur Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ ist deren sogenannte **Kontraposition**

$$\neg \mathcal{B} \Rightarrow \neg \mathcal{A} . \quad (2)$$

Interpretation: Wenn \mathcal{B} nicht zutrifft, dann sicher auch \mathcal{A} nicht. Der Leser ist aufgefordert, hier einen Moment innezuhalten und sich durch Nachdenken davon zu überzeugen, daß (1) und (2) gleichwertig sind. Oft ist $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ der interessierende und nützliche Sachverhalt, aber die Kontraposition ist leichter zu beweisen.

④ Gegeben sind ein gleichseitiges Dreieck D der Seitenlänge 2 in der Ebene sowie ein Vorrat an beweglichen Dreiecken der Seitenlänge $a < 2$. Es geht darum, das große Dreieck mit Hilfe von kleinen zu überdecken. (Überlappungen sind ausdrücklich zugelassen, siehe die Fig. 1.1.5) Betrachte die beiden folgenden Aussagen:

\mathcal{A} : D läßt sich mit 5 kleinen Dreiecken überdecken.

\mathcal{B} : D läßt sich mit 4 kleinen Dreiecken überdecken.

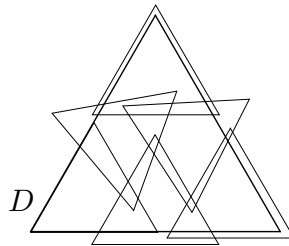


Fig. 1.1.5

Wir behaupten, es gilt

$$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} ,$$

und beweisen dies “durch Kontraposition”, das heißt: Wir beweisen $\neg \mathcal{B} \Rightarrow \neg \mathcal{A}$.

Angenommen, 4 kleine Dreiecke reichen nicht aus. Ein Blick auf die Fig. 1.1.6 zeigt, daß dann notwendigerweise $a < 1$ ist. Ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge < 1 kann aber höchstens einen der in Fig. 1.1.6 markierten Punkte überdecken, und da es sechs derartige Punkte hat, reichen 5 Dreiecke nicht aus für eine vollständige Überdeckung von D . \circ

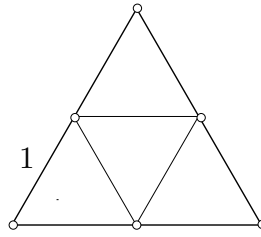


Fig. 1.1.6

Noch ein Wort zum Gebrauch der Quantoren \forall und \exists . Viele mathematische Sachverhalte haben ja die Form

$$\forall x : \mathcal{A}(x) \quad \text{bzw.} \quad \exists x : \mathcal{A}(x) .$$

$$\begin{aligned} \text{Bsp:} \quad \forall x > 0 \quad \forall y > 0 : \quad \sqrt{xy} &\leq \frac{x+y}{2} , \\ \exists c(\cdot) \quad \exists s(\cdot) : \quad c'(t) &\equiv -s(t) \quad \wedge \quad s'(t) \equiv c(t) . \end{aligned}$$

Zwei *gleiche* Quantoren dürfen vertauscht werden:

⑤ Werden in der Aussage

$$\forall c \geq 0 \quad \forall n \geq 1 \quad \exists! \xi \geq 0 : \quad \xi^n = c$$

(dieses ξ ist die n -te **Wurzel** aus c) die beiden \forall -Quantoren vertauscht, so resultiert die gleichbedeutende Aussage

$$\forall n \geq 1 \quad \forall c \geq 0 \quad \exists! \xi \geq 0 : \quad \xi^n = c .$$

○

Verschiedene Quantoren dürfen hingegen auf keinen Fall vertauscht werden:

⑥ Der bekannte **Fundamentalsatz der Algebra** lautet: Jedes Polynom

$$p(z) := z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$$

mit komplexen Koeffizienten a_k besitzt wenigstens eine Nullstelle $\zeta \in \mathbb{C}$. In Zeichen:

$$\forall p(\cdot) \quad \exists \zeta : \quad p(\zeta) = 0 .$$

Werden hier die Quantoren vertauscht, so kommt offensichtlicher Unsinn heraus:

$$\exists \zeta \quad \forall p(\cdot) : \quad p(\zeta) = 0 .$$

(“Es gibt eine komplexe Zahl ζ , so daß jedes Polynom mit komplexen Koeffizienten an der Stelle ζ den Wert 0 hat.”)

○

Bei abstrakteren Situationen ist es schon schwieriger, die Reihenfolge der Quantoren im Griff zu behalten:

⑦ Die Definition der Konvergenz von Folgen lautet (wir werden später in aller Ruhe darauf eingehen): Eine Zahlfolge x konvergiert gegen die Zahl ξ , wenn es für jede vorgegebene Toleranz $\varepsilon > 0$ ein n_0 gibt, so daß alle x_n mit Nummer $n > n_0$ innerhalb der Toleranz ε um ξ liegen (siehe die Fig. 1.1.7) — in Zeichen:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n > n_0 : \quad |x_n - \xi| < \varepsilon .$$

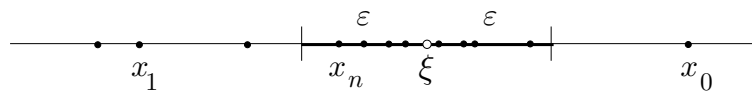


Fig. 1.1.7

Unsinnig ist hingegen die nach Vertauschen der ersten beiden Quantoren resultierende Konvergenzbedingung

$$\exists n_0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n > n_0 : \quad |x_n - \xi| < \varepsilon ,$$

denn das hieße ja: Es gibt ein n_0 , so daß alle x_n mit Nummer $n > n_0$ jede noch so scharfe Toleranzbedingung erfüllen, und das ist natürlich nur möglich, wenn alle diese x_n gleich ξ sind — eine höchst uninteressante Art von “Konvergenz”. ○

Aufgaben

1. Aus einem Zoologiebuch: “Jede ungebrochselte Kalupe ist dorig und jede foferante Kalupe ist dorig. In Quasiland gibt es sowohl dorige wie undorige Kalupen.” — Welche der nachstehenden Schlüsse über die Fauna von Quasiland sind zulässig?
 - (a) Es gibt sowohl gebrochselte wie ungebrochselte Kalupen.
 - (b) Es gibt gebrochselte Kalupen.
 - (c) Alle undorigen Kalupen sind gebrochselte.
 - (d) Einige gebrochselte Kalupen sind unfoferant.
 - (e) Alle gebrochselten Kalupen sind unfoferant.

2. Hier ist eine Aussage über Quorge:
- (a) Ist ein Quorg glavul, so ropanzt er.
- Formuliere (b) die Negation, (c) die Umkehrung, (d) die Kontraposition der Aussage (a). Welche Implikationen bestehen zwischen (a), (b), (c) und (d)?
3. Welche der folgenden Aussagen sind gültige Einwände gegen das Sprichwort "Alles verstehen heißt alles verzeihen"?
- (a) Niemand versteht alles.
 (b) Ich verstehe die Eifersucht, aber ich kann sie nicht verzeihen.
 (c) Ich verstehe alles, aber die Eifersucht kann ich nicht verzeihen.
 (d) Niemand würde alles verzeihen.
 (e) Ich verzeihe die Eifersucht, obwohl ich sie nicht verstehe.
4. Welche der in Fig. 1.1.8 abgebildeten Spielkarten muß man mindestens umdrehen, um mit Sicherheit die folgende Frage (*) beantworten zu können?
- (*) "Sind alle Karten mit schraffierter Rückseite Asse?"

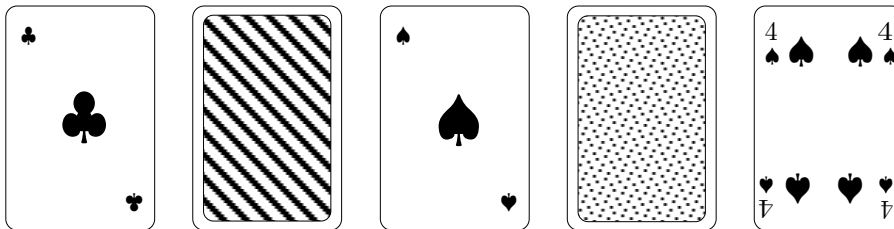


Fig. 1.1.8

5. Von den folgenden Aussagen ist genau eine richtig:
- (a) Fritz hat mehr als tausend Bücher.
 (b) Fritz hat weniger als tausend Bücher.
 (c) Fritz hat mindestens ein Buch.
- Wieviele Bücher hat Fritz?
6. Gegeben sind eine kreisrunde Bisquitdose sowie ein Vorrat von gleichgroßen kreisrunden Plätzchen. Zeige: Lassen sich 6 Plätzchen nebeneinander in die Dose legen, so auch deren 7. (*Hinweis*: Beweise die Kontraposition; vgl. Beispiel ④.)

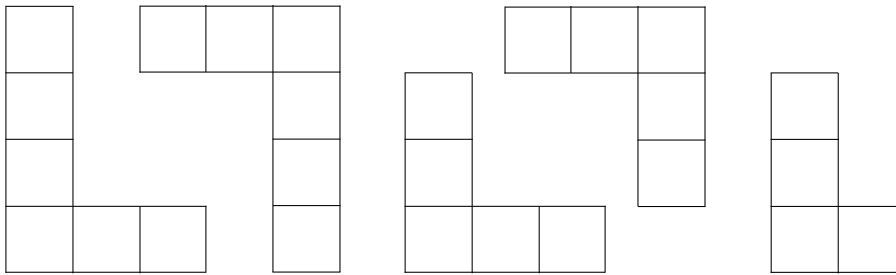


Fig. 1.1.9

7. Die fünf Teile der Figur 1.1.9 bestehen aus insgesamt 26 Einheitsquadraten. Sie sollen "achsenparallel" und ohne Überlappen in eine Schachtel mit quadratischer Grundfläche der Seitenlänge 5.94 gelegt werden. Zeige, daß das nicht geht.

1.2 Mengen

Reden über Mengen

Wir versuchen nicht zu erklären, was eine Menge ist, und wir werden auch keine “Mengenlehre” betreiben. In diesem Abschnitt geht es nur darum, die auf Mengen bezüglichen Schreibweisen und Bezeichnungen festzulegen. Alles beginnt natürlich mit der Relation

$$x \in A : \quad \text{“}x \text{ ist } \mathbf{Element} \text{ (Punkt) der Menge } A \text{”} , \\ \text{“}x \text{ in } A \text{”}$$

und ihrer Negation $x \notin A$, sprich: “ x nicht in A ”. Davon zu unterscheiden ist die **Inklusion**, eine Relation zwischen zwei Mengen:

$$A \subset B : \quad \text{“Die Menge } A \text{ ist } \mathbf{Teilmenge} \text{ der Menge } B \text{”} ,$$

will sagen: Jedes Element von A ist auch Element von B , in Zeichen:

$$\forall x : \quad x \in A \implies x \in B .$$

Bsp: $4 \in \mathbb{Q}, \quad \pi \notin \mathbb{Q}, \quad \sqrt{2}i \in \mathbb{C}, \quad \mathbb{R} \subset \mathbb{C} .$

Sind a, b, c, \dots, p, q gegebene Objekte, so bezeichnet zum Beispiel $\{a, c, p\}$ die Menge, die genau die Objekte a, b und p enthält, und $\{a, b, \dots, q\}$ die Menge, die genau die sämtlichen Objekte a, b, \dots, q enthält. Mit dem Symbol \emptyset ist die **leere Menge** gemeint.

Ist X eine vereinbarte Grundmenge (zum Beispiel $X := \mathbb{R}$) und $\mathcal{A}(x)$ eine Aussageform, die für jedes einzelne $x \in X$ entweder zutrifft oder eben nicht, so bezeichnet

$$\{x \in X \mid \mathcal{A}(x)\} \quad \text{bzw.} \quad \{x \mid \mathcal{A}(x)\}$$

die Menge aller derjenigen $x \in X$, für die $\mathcal{A}(x)$ zutrifft.

Bsp: $\{x \in \mathbb{R} \mid x^4 - 2x^2 = 0\} = \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\} ,$
 $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^4 - 2x^2 = 0\} = \{0\} ,$
 $\{z \in \mathbb{C} \mid z = \bar{z} \wedge z^2 = -4\} = \emptyset \quad (z = \bar{z} \text{ bedeutet: } z \text{ ist reell}).$

Zwei Mengen A und B sind **gleich**, in Zeichen: $A = B$, wenn jede eine Teilmenge der andern ist. Die Gleichheit von zwei zunächst unterschiedlich aussehenden Mengen läßt sich in einfachen Fällen durch eine Schlußkette der Gestalt

$$x \in A \iff \dots \iff \dots \iff \dots \iff x \in B$$

beweisen; in schwierigeren Fällen braucht es zwei über verschiedene Wege laufende Ketten

$$x \in A \implies \dots \implies \dots \quad \dots \implies x \in B$$

und

$$x \in B \implies \dots \implies \dots \quad \dots \implies x \in A .$$

① Die folgende Situation kommt immer wieder vor: Wir sollen eine Gleichung oder ein Gleichungssystem auflösen. Was ist damit gemeint? Die gegebene Gleichung,

Bsp:
$$\sqrt{2x - 1} = x - 2 ,$$

definiert eine Lösungsmenge L . Anstelle dieser “impliziten” Darstellung von L ist eine “explizite” Darstellung in der Form einer Liste verlangt. Typischerweise wird man nun mit Hilfe von geeigneten algebraischen Operationen aus den gegebenen Gleichungen neue, einfachere Gleichungen herleiten, an denen die gewünschte Liste unmittelbar abgelesen werden kann. In unserem Beispiel erhält man so nacheinander folgendes:

$$\begin{aligned} \sqrt{2x - 1} = x - 2 &\implies 2x - 1 = x^2 - 4x + 4 \implies \\ x^2 - 6x + 5 = 0 &\implies x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} \implies x = 5 \vee x = 1 , \end{aligned}$$

worauf man die Liste $L' := \{5, 1\}$ als Lösungsmenge präsentieren wird. In Wirklichkeit hat man aber nur $L \subset L'$ bewiesen und muß nun durch Einsetzen verifizieren, daß die umgekehrte Inklusion $L' \subset L$ ebenfalls zutrifft. Dabei stellt man fest, daß die Zahl 5 die gegebene Gleichung erfüllt, die Zahl 1 aber nicht. — Zum Spaß lassen wir auch Maple (Version V.2) diese Gleichung lösen:

- `solve(sqrt(2*x - 1) = x - 2, x);`
1, 5



Mengenoperationen

Verschiedene Verknüpfungen erlauben, aus gegebenen Mengen neue Mengen zu bilden. Wir benötigen:

Vereinigungsmenge $A \cup B$:

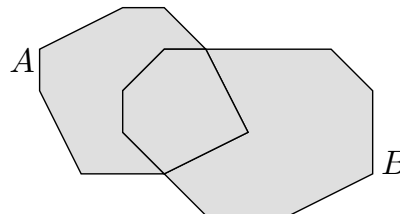


Fig. 1.2.1a

Durchschnitt $A \cap B$:

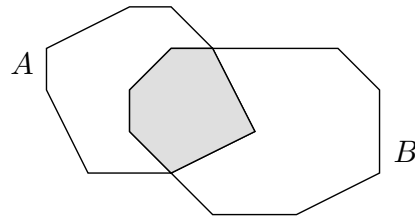


Fig. 1.2.1b

Differenzmenge $A \setminus B$:

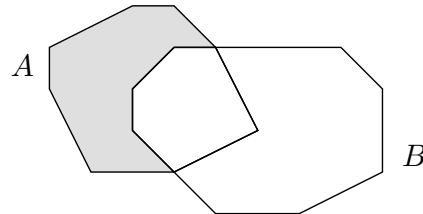


Fig. 1.2.1c

Die neuen Zeichen sind eingeführt worden, da die Schreibweisen $A+B$, $A \cdot B$, $A-B$ für Konstrukte reserviert bleiben sollten, bei denen tatsächlich “gerechnet” wird: Sind A und B Teilmengen von \mathbb{R} , so definiert man

$$A + B := \{x + y \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

und analog für $-$ und \cdot . Derartige Bildungen spielen bei der sogenannten Intervallarithmetik eine Rolle.

Besitzen die Mengen A und B einen leeren Durchschnitt, so heißen sie **disjunkt**, in Zeichen ausgedrückt: $A \supset \subset B$. Den gegenteiligen Sachverhalt: $A \cap B \neq \emptyset$, “ A und B schneiden sich”, bezeichnen wir kurz mit $A \not\supset \subset B$.

Sind a und b irgendwelche Objekte, so nennt man die Liste

$$(a, b)$$

ein **geordnetes Paar**. Dieses zweikomponentige Objekt ist wohl zu unterscheiden von der Menge $\{a, b\}$, bei der es nicht auf die Reihenfolge der Elemente ankommt.

① Die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - 5x + 6 = 0$ bilden die zweielementige Menge $\{2, 3\}$. Die Lösung des Gleichungssystems

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 5 \\ 4x - y = 2 \end{array} \right\}$$

hingegen ist das geordnete Paar $(x, y) = (1, 2)$.



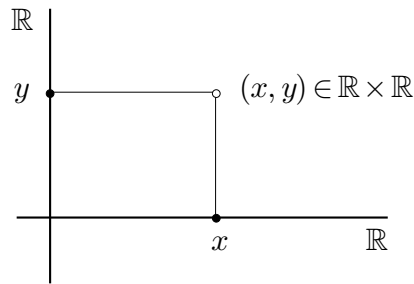


Fig. 1.2.2

A und B seien beliebige Mengen. Dann heißt die Menge

$$A \times B := \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}$$

aller aus je einem Element von A und von B gebildeten Paare das **kartesische Produkt** von A und B , weil Descartes mit der Erfindung des Koordinatenkreuzes als erster die Ebene als “Produkt” von zwei reellen Achsen aufgefaßt hat (Fig. 1.2.2).

Anstelle von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ schreibt man natürlich \mathbb{R}^2 . Analog ist \mathbb{R}^3 die Menge

$$\{ (x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \}$$

aller geordneten **Tripel** (x, y, z) von reellen Zahlen und allgemein \mathbb{R}^n die Menge aller sogenannten **n -Tupel** (x_1, x_2, \dots, x_n) .

Ist A eine beliebige endliche Menge, so bezeichnet man die Anzahl ihrer Elemente mit $\#A$ oder auch mit $|A|$.

Bsp: Hier ist ein fundamentales Prinzip der Kombinatorik:

$$\#(A \times B) = \#A \cdot \#B .$$

Aufgaben

1. Stelle die folgenden Mengen in geeigneten Figuren anschaulich dar:

- (a) $\{t \in \mathbb{R} \mid 4 < t^2 \leq 16\}$, (b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| + |z + 1| = 8\}$,
- (c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z = 1\}$,
- (d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{1-x} < 1 - \frac{x}{2}\right\}$,
- (e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq |x| + |y| \leq 2\}$,
- (f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - y| + 2 \leq |x|\}$.

2. Zwei an sich unabhängige reelle Größen x und y sind miteinander verknüpft durch die Einschränkung

$$x^2 + 6x \leq 8y - y^2 . \quad (*)$$

- (a) Man verschaffe sich eine Übersicht über die Gesamtheit der möglichen "Zustände" (x, y) . Gemeint ist: Man zeichne eine Figur.
- (b) Welchen Wert kann die Größe x unter der Bedingung $(*)$ höchstens annehmen, und wie müßte y gewählt werden, damit dieser Maximalwert von x tatsächlich realisiert werden kann?
3. Es bezeichne A das Innere des Oktaeders mit den sechs Ecken $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$. Man stelle diese Menge auf möglichst einfache Weise in der Form $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \dots\}$ dar.
4. Naef (ein Spielzeugfabrikant) produziert einen kugelförmigen Spielwürfel, auf dem die Zahlen von 1 bis 6 aufgemalt sind. Wenn dieser "Würfel" auf einer horizontalen Ebene zur Ruhe kommt, ist allemal eine Zahl zuoberst. Überlege, wie dieses Objekt funktioniert, und stelle dessen Hauptkomponente in der Form $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \dots\}$ dar.
5. Es sei S die Menge aller natürlichen Zahlen ohne quadratischen Teiler, T die Menge aller natürlichen Zahlen mit genau drei Primfaktoren (1 ist keine Primzahl) und U die Menge aller natürlichen Zahlen ≤ 200 . Bestimme $S \cap T \cap U$.
6. Bestimme die Lösungsmenge $L \subset \mathbb{R}^2$ des folgenden Gleichungssystems:

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{x+1} + y = 1 \\ 2x - \sqrt{24y+25} = 5 \end{array} \right\} .$$

(Hinweis: \sqrt{c} ist nur für $c \geq 0$ definiert und bezeichnet die nichtnegative Lösung t der Gleichung $t^2 = c$.)

1.3 Natürliche Zahlen

Es geht hier um die Verwendung der natürlichen Zahlen zum Zählen und zum Nummerieren, weniger ums Rechnen in \mathbb{N} . — Im folgenden sind j, k, l, m, n Variable für natürliche oder ganze Zahlen, auch wenn das nicht an jeder Stelle ausdrücklich gesagt wird. Für Mengen von aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen verwenden wir die folgende Notation:

$$\{k \in \mathbb{Z} \mid p \leq k \leq q\} =: [p..q].$$

Summen- und Produktzeichen

Wir beginnen mit der Erklärung des **Summenzeichens** \sum : Es seien p und q beliebige ganze Zahlen, und die Objekte a_k (Zahlen, Vektoren, Funktionen, ...) seien für alle $k \in [p..q]$ definiert. Dann ist

$$\sum_{k=p}^q a_k := \begin{cases} 0 & (q < p), \\ a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \dots + a_q & (q \geq p). \end{cases}$$

Die Anzahl der Summanden ist also $= q - p + 1$. Die Variable k heißt **Summationsvariable**. Der Wert der Summe hängt ab von den Werten der Summanden a_k und von den **Summationsgrenzen** p und q , hingegen nicht davon, welcher Buchstabe als Summationsvariable gewählt wurde.

① Sei etwa

$$a_k := \frac{(k+1)(k+3)}{2k-1}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 a_k &= \sum_{j=1}^5 a_j = \sum_{j=1}^5 \frac{(j+1)(j+3)}{2j-1} \\ &= \underbrace{\frac{2 \cdot 4}{1}}_{j=1} + \frac{3 \cdot 5}{3} + \frac{4 \cdot 6}{5} + \frac{5 \cdot 7}{7} + \underbrace{\frac{6 \cdot 8}{9}}_{j=5} = \frac{422}{15}. \end{aligned}$$

Die Zuweisungen

$$b_0 := 3, \quad b_1 := 5, \quad b_2 := 6, \quad b_3 := 4, \quad b_4 := 2$$

liefern

$$\sum_{k=0}^4 b_k \cdot 10^k = 24653, \quad \sum_{k=0}^4 b_k \cdot 10^{-k} = 3.5642.$$

Mit den doppelt indizierten Summanden $c_{kj} := k/j^2$ lassen sich zum Beispiel die folgenden Summen bilden:

$$\sum_{k=3}^6 c_{k4} = \frac{3}{16} + \frac{4}{16} + \frac{5}{16} + \frac{6}{16} = \frac{9}{8},$$

$$\sum_{j=1}^3 c_{2j} = \frac{2}{1} + \frac{2}{4} + \frac{2}{9} = \frac{49}{18}.$$

○

Gelegentlich ist es nützlich, unter dem Summenzeichen eine Variablentranslation vorzunehmen, zum Beispiel “ $k + 1$ durch k zu ersetzen”. Das geht so vor sich: Im Ausdruck für a_k wird die Summationsvariable k vermöge $k := k' - r$ bzw. $k + r = k'$ durch eine neue Variable k' ausgedrückt, wobei die “Verschiebungszahl” r frei gewählt werden kann. Damit dieselben Dinge wie vorher aufsummiert werden, muß die Variable k' von $p+r$ bis $q+r$ laufen. Am Schluß kann der Strich wieder weggelassen werden. Im ganzen sieht das so aus:

$$\sum_{k=p}^q a_k = \sum_{k'=p+r}^{q+r} a_{k'-r} = \sum_{k=p+r}^{q+r} a_{k-r}.$$

② In der Summe

$$S_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \quad (1)$$

ist

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}. \quad (2)$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &\text{(eine **teleskopierende Summe**)} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

Es ist also gelungen, die Reihe (1) zu **summieren**, das heißt: eine \sum -freie Darstellung von S_n anzugeben. Wir behandeln nun dieses einfache Beispiel noch einmal mit Hilfe einer Variablentranslation. Aufgrund von (2) ist

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}. \quad (3)$$

In der zweiten Summe setzen wir $k := k' - 1$ bzw. $k + 1 = k'$; dann geht k' von 2 bis $n + 1$, und wir erhalten

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{k'=2}^{n+1} \frac{1}{k'} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k},$$

wobei der Strich zum Schluß wieder weggelassen wurde. Aus (3) ergibt sich nun

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

wie oben. ○

Analog zum Summenzeichen wird das **Produktzeichen** \prod erklärt:

$$\prod_{k=p}^q a_k := \begin{cases} 1 & (q < p), \\ a_p \cdot a_{p+1} \cdot \dots \cdot a_q & (q \geq p). \end{cases}$$

Beachte: Das ‐leere Produkt‐ hat definitionsgemäß den Wert 1. Als Beispiel diene die **Fakultät**(funktion)

$$0! := 1, \quad n! := \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \quad (n \geq 1)$$

(gelesen ‐ n -Fakultät‐). Bekanntlich zählt $n!$ die Anzahl Arten, n unterscheidbare Objekte in eine Reihe zu legen oder von 1 bis n zu nummerieren. Im Gegensatz zur Summe $1 + 2 + 3 + \dots + n$ läßt sich $n!$ nicht mühelos berechnen. Für große n gibt es die **Stirlingsche Näherungsformel**

$$n! \doteq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Bsp: $10! = 3\,628\,800$; die Stirlingsche Formel liefert $10! \doteq 3\,598\,695.622$.

Mit Hilfe der Fakultät werden die sogenannten **Binomialkoeffizienten**

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

(gelesen ‐ n tief k ‐) gebildet, die ebenfalls in der Kombinatorik eine Rolle spielen. Beispiel: Eine n -elementige Menge besitzt genau $\binom{n}{k}$ verschiedene k -elementige Teilmengen (s.u.). Die Binomialkoeffizienten genügen verschiedenen Identitäten, so zum Beispiel der folgenden, die dem sogenannten **Pascalschen Dreieck** (Tabelle der Binomialkoeffizienten) zugrundeliegt:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}. \quad (4)$$

□ Indem man auf den Generalnenner bringt, erhält man

$$\begin{aligned} \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} &= \frac{n!}{k!(n-k+1)!} (k + (n-k+1)) \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}. \quad \square \end{aligned}$$

Vollständige Induktion

Zu den Grundeigenschaften von \mathbb{N} gehört das Prinzip (Axiom) der **vollständigen Induktion**:

Es sei $\mathcal{A}(n)$ eine Aussageform über natürliche Zahlen n . Trifft $\mathcal{A}(0)$ zu und gilt für alle $n \geq 0$ die Implikation $\mathcal{A}(n) \implies \mathcal{A}(n+1)$, so trifft $\mathcal{A}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zu.

Um mit Hilfe dieses Prinzips nachzuweisen, daß $\mathcal{A}(n)$ für alle natürlichen n zutrifft, hat man hiernach folgendes zu tun:

1. Man muß verifizieren, daß $\mathcal{A}(0)$ zutrifft. (**Verankerung**)
2. Man muß einen für alle $n \geq 0$ gültigen Beweis liefern, daß die Aussage $\mathcal{A}(n+1)$ zutrifft, wenn man annimmt, daß $\mathcal{A}(n)$ zutrifft. (**Induktionsschritt**)

Wir geben dazu zwei Beispiele.

③ Es soll das folgende Sätzlein bewiesen werden: Ist $n \geq 2$ und $0 < x_k < 1$ für $1 \leq k \leq n$, so gilt

$$\prod_{k=1}^n (1 - x_k) > 1 - \sum_{k=1}^n x_k. \quad (5)$$

(Diese Ungleichung ist dann interessant, wenn alle x_k sehr klein sind. Sie besagt: Werden mehrere Rabatte hintereinander abgezogen, so muß man mehr bezahlen, als wenn einfach die Rabattsätze addiert werden.)

□ Wir bezeichnen die zu beweisende Formel (5) mit $\mathcal{A}_{>}(n)$. Verankerung: Für $n := 1$ gilt anstelle von $>$ das Gleichheitszeichen, d.h. $\mathcal{A}_{=}(1)$ trifft zu. — Induktionsschritt: Wir zeigen, daß $\mathcal{A}_{>}(n+1)$ schon aus der abgeschwächten Voraussetzung $\mathcal{A}_{\geq}(n)$ folgt:

$$\prod_{k=1}^{n+1} (1 - x_k) = \prod_{k=1}^n (1 - x_k) \cdot (1 - x_{n+1})$$

$$\begin{aligned} &\geq \left(1 - \sum_{k=1}^n x_k\right) \cdot (1 - x_{n+1}) = 1 - \sum_{k=1}^n x_k - x_{n+1} + \sum_{k=1}^n x_k x_{n+1} \\ &> 1 - \sum_{k=1}^{n+1} x_k . \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \lrcorner \\ \circ \end{array}$$

④ Es bezeichne $T(k, n)$ die Anzahl der verschiedenen k -elementigen Teilmengen der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$. Durch Induktion “nach n ” beweisen wir:

$$T(k, n) = \binom{n}{k} \quad (0 \leq k \leq n) .$$

Die Aussage $\mathcal{A}(n)$ hat hier folgende Form: Für alle k zwischen 0 und n trifft ein bestimmter Sachverhalt zu.

┌ Verankerung: $T(0, 0) = 1 = \binom{0}{0}$. — Induktionsschritt: Man erhält eine k -elementige Teilmenge von $\{1, \dots, n, n+1\} = \{1, \dots, n\} \cup \{n+1\}$, indem man

- entweder eine k -elementige Teilmenge von $\{1, \dots, n\}$ bildet
- oder eine $(k-1)$ -elementige Menge von $\{1, \dots, n\}$ bildet und das Element $n+1$ hinzunimmt.

Die Anzahlen der genannten Teilmengen stehen hiernach in der folgenden Beziehung zueinander:

$$T(k, n+1) = T(k, n) + T(k-1, n) .$$

Nach Induktionsvoraussetzung und (4) ist folglich

$$T(k, n+1) = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} . \quad \begin{array}{l} \lrcorner \\ \circ \end{array}$$

⑤ Wir betrachten das Produkt

$$P := \prod_{k=1}^n (1 + x_k) = (1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3) \cdots (1 + x_n)$$

als Funktion der Variablen x_1, \dots, x_n . Wird rechter Hand tatsächlich ausmultipliziert, so entstehen insgesamt 2^n Summanden. Jeder Summand ist ein Produkt einer gewissen Auswahl von insgesamt n Einsen und Ixen. Ordnet man die Summanden nach steigender Aufladung mit Ixen, so hat man

$$\begin{aligned} P = & 1 + (x_1 + x_2 + \dots + x_n) + \left(\underbrace{x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n}_{\text{alle } \binom{n}{2} \text{ möglichen Produkte von je zwei Ixen}} \right) \\ & + \left(\underbrace{x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n}_{\text{alle } \binom{n}{3} \text{ möglichen Produkte von je drei Ixen}} \right) + \dots + x_1x_2 \cdots x_n . \end{aligned}$$

Es sei jetzt x eine fest gegebene reelle (oder komplexe) Zahl. Setzen wir alle $x_k := x$, so hat einerseits P den Wert $(1+x)^n$, und andererseits hat jedes Produkt von r Ixen den Wert x^r . Wir erhalten daher

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}x^k\end{aligned}$$

(**Binomischer Lehrsatz**). Wir werden später sehen, daß diese Formel auf beliebige reelle Exponenten α (anstelle von n) umgeschrieben werden kann. Dabei entsteht die sogenannte Binomialreihe. \circ

In diesen Zusammenhang gehört das Prinzip der **rekursiven Definition**. Eine Folge x . (zum Beispiel von Näherungswerten für eine gesuchte Größe ξ) läßt sich festlegen durch die Vorgabe von x_0 und eine Vorschrift, die für jedes $n \geq 0$ den Wert x_{n+1} zu berechnen gestattet, wenn alle vorangehenden Werte x_0, x_1, \dots, x_n bekannt sind. Computer lieben das heiß; besonders, wenn zur Berechnung von x_{n+1} nur die zuletzt gefundenen Werte x_k gebraucht werden. Es ist dann nicht nötig, alle x_k zu speichern, und das Rechenprogramm hat die Struktur einer "Schleife".

⑥ Es sei $c > 1$ eine fest vorgegebene Zahl. Betrachte die durch

$$x_0 := c, \quad x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right) \quad (n \geq 0)$$

rekursiv definierte Folge x . von positiven Zahlen. Wir zeigen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{c}.$$

┌ Man hat

$$x_{n+1} - \sqrt{c} = \frac{1}{2x_n}(x_n^2 + c - 2x_n\sqrt{c}) = \frac{(x_n - \sqrt{c})^2}{2x_n}; \quad (6)$$

insbesondere ist $x_n > \sqrt{c} > 1$ für alle $n \geq 0$. Wir schreiben (6) in der Form

$$x_{n+1} - \sqrt{c} = q_n(x_n - \sqrt{c})$$

mit

$$0 < q_n := \frac{x_n - \sqrt{c}}{2x_n} < \frac{1}{2}$$

und schließen daraus, daß nach jedem Rechenschritt der Abstand zwischen x_n und \sqrt{c} höchstens noch halb so groß ist wie vorher. Hieraus folgt schon die Behauptung. \lrcorner

In Wirklichkeit ist die Konvergenz noch wesentlich besser, nämlich “quadratisch”. Nach einigen Schritten ist bestimmt $x_n - \sqrt{c} < 1$, und von da an sorgt (6) bzw.

$$x_{n+1} - \sqrt{c} < \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{c})^2$$

dafür, daß sich die Zahl der richtigen Dezimalstellen mit jedem Schritt im wesentlichen verdoppelt, denn es ist zum Beispiel $0.001^2 = 0.000001$.

Bsp: Für $c := 100$ erhält man nacheinander

100.0
50.5
26.24
15.03
10.84
10.03
10.000 053
10.000 000 00 .

○

Aufgaben

1. Zeige mit vollständiger Induktion:

- (a) Durch n Geraden “in allgemeiner Lage” wird die Ebene in $\frac{n^2 + n + 2}{2}$ Gebiete zerlegt. (*Hinweis:* Jede weitere Gerade zerlegt eine ganz bestimmte Anzahl der schon vorhandenen Gebiete in zwei Teile.)
- (b) Für beliebiges $x > -1$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad (\text{Bernoullische Ungleichung}) .$$

- (c) Die Summe aller weder durch 2 noch durch 5 teilbaren natürlichen Zahlen $< 10n$ beträgt $20n^2$.
- (d) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, (e) $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$.

2. (M) Bestimme den Koeffizienten beim Term $x^4 y^7$ in der Entwicklung von

$$(3 - 5x + 7y)^{13} .$$

1.4 Reelle Zahlen

Begriff des Körpers

Nicht ganzzahlige Größen werden bekanntlich mit Hilfe von gemeinen Brüchen oder mit Hilfe von Dezimal- bzw. Dualbrüchen dargestellt oder wenigstens approximiert.

Die **gemeinen Brüche**

$$\frac{p}{q} \quad (p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}_{\geq 1})$$

bilden zusammen den Körper \mathbb{Q} der **rationalen Zahlen**. In der Analysis arbeiten wir mit dem umfassenderen Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen — davon unten mehr. Der Begriff **Körper** bezeichnet den Sachverhalt, daß in dem betreffenden System die vier Grundrechenarten unbeschränkt ausführbar sind (ausgenommen natürlich die Division durch 0) und daß die üblichen Rechengesetze gelten, zum Beispiel

$$\begin{aligned}x + y &= y + x, & (x + y) + z &= x + (y + z) \\0 \cdot x &= 0, & -(-x) &= x, \\x \cdot (y + z) &= x \cdot y + x \cdot z,\end{aligned}$$

allgemeiner:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m x_i \cdot \sum_{k=1}^n y_k &= \sum_{1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n} x_i y_k, \\x \cdot y = 0 &\implies x = 0 \vee y = 0\end{aligned}$$

und weitere dieser Art.

Darüberhinaus sind \mathbb{Q} und \mathbb{R} **geordnet**, das heißt: Für je zwei Zahlen x und y gilt genau eine der Beziehungen

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y.$$

Bezüglich dieser Ordnung gelten die üblichen Regeln über das Rechnen mit Ungleichungen, zum Beispiel

$$\begin{aligned}(x < y) \wedge (y < z) &\implies x < z \quad (\mathbf{Transitivität}), \\x < y &\implies x + a < y + a, \\(a > 0) \wedge (x < y) &\implies ax < ay, \\(a < 0) \wedge (x < y) &\implies ax > ay \quad (!), \\x > y > 0 &\implies 0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{y}\end{aligned}$$

und weitere dieser Art.

Eine Teilmenge von \mathbb{R} der Form

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} =: [a, b]$$

heißt ein **abgeschlossenes Intervall**, und

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} =:]a, b[$$

ist ein **offenes Intervall**. Für **unendliche Intervalle** verwenden wir die folgenden Bezeichnungen:

$$\mathbb{R}_{\geq a} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}, \quad \mathbb{R}_{>a} := \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}.$$



Fig. 1.4.1

① Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{x^2 + 2x}{x - 1} < 3x - 4? \quad (*)$$

Da $x - 1$ beiderlei Vorzeichen annehmen kann, darf man nicht einfach heraufmultiplizieren, sondern muß Fallunterscheidungen vornehmen. — Im Fall $x > 1$ ist

$$\begin{aligned} (*) &\iff x^2 + 2x < (x - 1)(3x - 4) = 3x^2 - 7x + 4 \\ &\iff 2x^2 - 9x + 4 > 0 \\ &\iff 2(x - 4)\left(x - \frac{1}{2}\right) > 0 \\ &\iff x > 4 \end{aligned}$$

($x < \frac{1}{2}$ ist mit $x > 1$ nicht vereinbar).

Gilt jedoch von vorneherein $x < 1$, so erhält man analog

$$\begin{aligned} (*) &\iff x^2 + 2x > (x - 1)(3x - 4) \\ &\vdots \\ &\iff 2(x - 4)\left(x - \frac{1}{2}\right) < 0 \\ &\iff \frac{1}{2} < x < 1. \end{aligned}$$

Die gesuchte Menge ist somit die Vereinigung der beiden Intervalle $\mathbb{R}_{>4}$ und $] \frac{1}{2}, 1[$, siehe die Fig. 1.4.1. \bigcirc

Betrags- und Signumfunktion

Mit Hilfe der Ordnung definiert man die **Betragsfunktion** (Fig. 1.4.2)

$$|x| := \text{abs } x := \begin{cases} x & (x \geq 0), \\ -x & (x \leq 0). \end{cases}$$

Bsp: $-5 < 0 \implies |-5| := -(-5) = 5.$

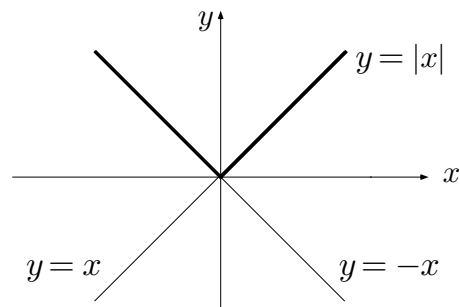


Fig. 1.4.2

Die Größe $|x|$ ist immer ≥ 0 und stellt den Abstand des Punktes x vom Ursprung dar. Es gilt (Fig. 1.4.3):

$$|x| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x < \varepsilon.$$



Fig. 1.4.3

Allgemein ist $|x - a|$ der Abstand des Punktes x vom Punkt a auf der Zahlengeraden, und es gilt

$$|x - a| < \varepsilon \iff a - \varepsilon < x < a + \varepsilon.$$

Die Betragsfunktion ist multiplikativ:

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|,$$

und sie genügt der sogenannten **Dreiecksungleichung**:

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

die bei Fehlerabschätzungen eine zentrale Rolle spielt.

Tritt die Betragsfunktion in einer definierenden Gleichung auf, so sind im allgemeinen Fallunterscheidungen notwendig.

② Wir behandeln die folgende Aufgabe: Man zeichne den Graphen der Funktion

$$f(x) := |2 - |1 - x|| - |x| .$$

Die Terme $|1 - x|$ und $|x|$ bewirken, daß jedenfalls an den Stellen 0 und 1 "etwas passiert". Wir haben daher vorweg drei Fälle, die sich (wegen der äußeren $|\cdot|$ -Klammer) unter Umständen weiter aufteilen.

1 : $x \leq 0$ ($\implies 1 - x \geq 0$)

Hier ist

$$f(x) = |2 - (1 - x)| - (-x) = |1 + x| + x .$$

Wir unterscheiden daher weiter: Im Fall

1.1 : $x \leq -1$ ($\implies 1 + x \leq 0$)

gilt

$$f(x) = -(1 + x) - (-x) = -1 ,$$

und im Fall

1.2 : $-1 \leq x \leq 0$ ($\implies 1 + x \geq 0$)

hat man

$$f(x) = 1 + x - (-x) = 1 + 2x .$$

2 : $0 \leq x \leq 1$ ($\implies 1 \pm x \geq 0$) .

Hier ist

$$f(x) = |2 - (1 - x)| - x = |1 + x| - x = 1 + x - x = 1 .$$

3 : $x \geq 1$ ($\implies 1 - x \leq 0$) .

Man hat

$$f(x) = |2 + (1 - x)| - x = |3 - x| - x$$

und muß daher weiter unterscheiden: Im Fall

3.1 : $1 \leq x \leq 3$ ($\implies 3 - x \geq 0$)

gilt

$$f(x) = 3 - x - x = 3 - 2x ,$$

und im Fall

3.2 : $x \geq 3$

schließlich

$$f(x) = -(3 - x) - x = -3 .$$

Alles in allem erhalten wir den in Fig. 1.4.4 dargestellten Graphen.



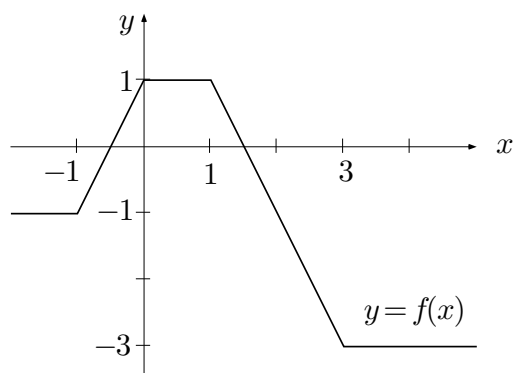


Fig. 1.4.4

Die in der Betragsfunktion verlorengegangene Information über x ist gespeichert in der **Signumfunktion** (Fig. 1.4.5)

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1 & (x > 0) , \\ 0 & (x = 0) , \\ -1 & (x < 0) . \end{cases}$$

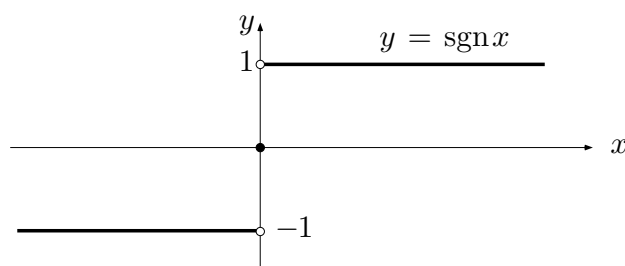


Fig. 1.4.5

Es gelten folgende Identitäten:

$$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x| , \quad \operatorname{sgn} (x \cdot y) = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y ;$$

die Signumfunktion ist also ebenfalls multiplikativ.

Von den rationalen zu den reellen Zahlen

Die hier behandelten Rechenregeln gelten zunächst in \mathbb{Q} , dann aber auch in \mathbb{R} . Was sind denn überhaupt "reelle Zahlen"? Schon die Pythagoräer wußten, daß die rationalen Zahlen für eine befriedigende Theorie des Quadrats nicht

ausreichen. Es wird aber berichtet, daß “der Mann, der als erster die Betrachtung der irrationalen Größen aus dem Verborgenen an die Öffentlichkeit brachte, durch einen Schiffbruch umgekommen sei, und zwar deshalb, weil das Unaussprechliche und Bildlose für immer hätte verborgen bleiben sollen.”

\mathbb{R} ist also eine Erweiterung, “Vervollständigung” von \mathbb{Q} . Um hiervon eine gewisse Vorstellung zu vermitteln, nehmen wir allerdings zuerst eine Ausdünnung von \mathbb{Q} vor, indem wir von den gemeinen Brüchen nur noch die behalten, deren Nenner eine Potenz von 10 bzw. von 2 ist — in anderen Worten: indem wir zu endlichen Dezimal- bzw. Dualbrüchen übergehen. Dies entspricht auch unserem tatsächlichen Umgang mit reellen Zahlen in der Rechenpraxis; denn das numerische Rechnen mit gemeinen Brüchen ist ziemlich umständlich. Es beginnt damit, daß verschiedene Brüche, zum Beispiel $\frac{15}{24}$ und $\frac{20}{32}$, ohne weiteres dieselbe Zahl darstellen können und daß sehr nahe beieinanderliegende Zahlen sehr verschiedene Darstellungen haben:

$$\left| \frac{233}{610} - \frac{377}{987} \right| < 0.0000017 .$$

Vor allem aber pflegen die Nenner beim Aufaddieren von Zahlenkolonnen ins Uferlose zu wachsen.

Wir betrachten also für einen Moment nur noch rationale Zahlen a der speziellen Form

$$a = \frac{p}{2^s} \quad (p \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{N})$$

und bezeichnen die Menge dieser Zahlen mit \mathbb{D} . Jedes $a \in \mathbb{D}$ besitzt eine im wesentlichen eindeutig bestimmte Darstellung als **(endlicher) Dualbruch**:

$$a = ' \pm \beta_r \dots \beta_{-2} \beta_{-1} \beta_0 \cdot \beta_1 \beta_2 \dots \beta_s ' , \quad \beta_k \in \mathbb{B} \quad (r \leq k \leq s)$$

($r \leq 0$ und $s \geq 0$ hängen von a ab). Diese Darstellung codiert den folgenden Sachverhalt:

$$a = \pm \sum_{k=r}^s \beta_k 2^{-k} .$$

Das Rechnen mit Dualbrüchen ist ja genial einfach, und es ist auch von bloßem Auge möglich, eine Liste von Dualbrüchen der Größe nach zu ordnen.

Anmerkung: Anstelle von Dualbrüchen könnte man auch Dezimalbrüche nehmen.

In Fig. 1.4.6 wurde versucht, den **kaskadischen**, das heißt: sich in immer kleineren Maßstäben reproduzierenden Charakter der Menge \mathbb{D} zeichnerisch umzusetzen. Algebraisch gesehen ist \mathbb{D} ein **Ring** (das heißt: Addition, Subtraktion und Multiplikation sind in \mathbb{D} unbeschränkt möglich), aber kein Körper mehr, denn die Division von Dualbrüchen geht im allgemeinen nicht auf. Das läßt sich verschmerzen, da \mathbb{D} in der Menge aller reellen Zahlen dicht

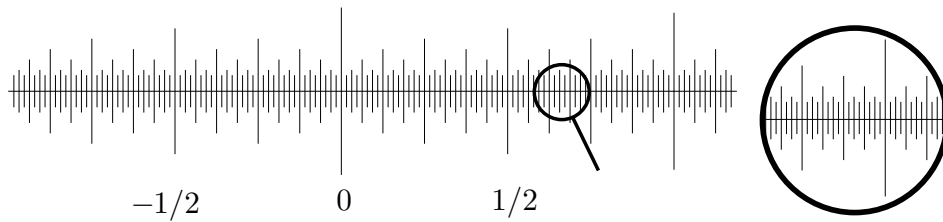


Fig. 1.4.6

liegt (siehe die Figur) und man sich in der Praxis mit einer hinreichenden Approximation zufrieden gibt.

So läuft zum Beispiel der in der Schule gelernte Divisionsalgorithmus auf folgendes hinaus: Es seien a und b gegebene Dualbrüche, $b \neq 0$, deren Quotient a/b als Dualbruch dargestellt werden soll, und es sei $\varepsilon > 0$ eine beliebig kleine vorgegebene Toleranz, zum Beispiel $\varepsilon := 2^{-20}$. Dann kann man (durch “Herunterholen von Nullen”) immer ein $q \in \mathbb{D}$ finden, so daß gilt:

$$q \leq \frac{a}{b} < q + \varepsilon .$$

In anderen Worten: Der vom Divisionsalgorithmus gelieferte Dualbruch q ist weniger als ε von der “gemeinten” Zahl a/b entfernt.

③ Zur Erläuterung rechnen wir im vertraueren Dezimalsystem. Es soll die Zahl $a/b := 83/19$ in einen Dezimalbruch “entwickelt” werden. Der Divisionsalgorithmus liefert

a	b	q
83.	: 19	= 4.36842
7.0		
1.30		
.160		
80		
40		
2 (“Rest”).		

Wird an dieser Stelle abgebrochen, so gilt einerseits $qb < a$ (wegen des Restes) und andererseits $(q + 10^{-5})b > a$ (sonst wäre die letzte Stelle von q nicht 2 gewesen). Zusammen ergibt sich

$$q < \frac{a}{b} < q + 10^{-5} ,$$

wie oben allgemein beschrieben. ○

Für den Rest dieses Abschnitts treffen wir die folgende Vereinbarung: lateinische Buchstaben a, b, x, \dots sowie ε bezeichnen Dualbrüche und griechische Buchstaben α, β, \dots reelle Zahlen.

Die “reellen Zahlen” sind gewisse ideale Objekte, mit denen wir etwa folgende Vorstellungen verknüpfen:

- (a) Die reellen Zahlen bilden einen geordneten Körper.
- (b) Jede reelle Zahl α läßt sich beliebig genau durch Dualbrüche von unten annähern. Genau: Zu jeder noch so kleinen Toleranz $\varepsilon > 0$ (zum Beispiel $\varepsilon := 2^{-20}$) gibt es ein $a \in \mathbb{D}$ mit

$$a \leq \alpha < a + \varepsilon .$$

- (c) Ist $a \doteq \alpha$ und $b \doteq \beta$, so gilt $a + b \doteq \alpha + \beta$ und $a \cdot b \doteq \alpha \cdot \beta$.

Dieser entscheidende Sachverhalt ermöglicht, in Gedanken und Formeln zwei “unendlich genaue” reelle Zahlen exakt miteinander zu multiplizieren und dann dieselbe Rechnung mit endlichen Dualbrüchen numerisch zu simulieren.

- (d) Jeder “unendliche Dualbruch” stellt eine reelle Zahl dar, und umgekehrt: Jede reelle Zahl besitzt eine im wesentlichen eindeutige Darstellung als “unendlicher Dualbruch”.

(Die Elemente von \mathbb{D} besitzen genau zwei derartige Darstellungen, alle andern reellen Zahlen genau eine. So stellen zum Beispiel $0.1111\dots$ und $1.0000\dots$ beide die Zahl $1 \in \mathbb{R}$ dar.)

- ④ Die reelle Zahl $\alpha := 4/7$ besitzt die nicht abbrechende Dualbruchentwicklung

$$0.10010010010010\dots \quad \left(= \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \frac{1}{1024} + \dots = \frac{4}{7} \right)$$

und läßt sich folglich durch die endlichen Dualbrüche

$$\begin{array}{l} 0.1 \\ 0.1001 \\ 0.1001001 \\ 0.1001001001 \\ \vdots \end{array}$$

besser und besser approximieren.



Daß sich nach diesen vagen Vorstellungen tatsächlich ein logisch konsistentes System \mathbb{R} aus \mathbb{D} (bzw. aus \mathbb{Q}) fabrizieren läßt, hat Dedekind 1872 als erster bewiesen. In diesem System sind dann nicht nur so einfache Zahlen wie $\sqrt{2}$ (bzw. $4/7$ wieder) vorhanden, sondern “überabzählbar viele” (s.u.) weitere, darunter natürlich e und π , und alle lassen sich mindestens in Gedanken mit unendlicher Genauigkeit erfassen, addieren und multiplizieren.

Der geometrische Gehalt dieser Erweiterung ist folgender: Die zu \mathbb{D} hinzugefügten Zahlen bilden sozusagen den “Leim”, der die in Fig. 1.4.6 dargestellte kaskadische Struktur zu einem vollständig homogenen Kontinuum macht. So ist es zum Beispiel möglich, \mathbb{D} mit einer Axt in eine Untermenge A und eine Obermenge B zu spalten, ohne dabei eine einzige Zahl zu berühren,

$$\text{Bsp:} \quad A := \{x \in \mathbb{D} \mid x < \sqrt{2}\}, \quad B := \{x \in \mathbb{D} \mid x > \sqrt{2}\}.$$

Hier gibt es zwischen jedem einzelnen $x \in A$ und $\sqrt{2}$ unendlich viele weitere Zahlen von A . Eine derartige Zerlegung von \mathbb{R} ist jedoch nicht möglich: Wird \mathbb{R} auf irgendeine Weise in eine Untermenge A und eine Obermenge B gespalten, so hat *entweder* A ein maximales Element *oder* B ein minimales Element. Jedenfalls berührt die Axt eine wohlbestimmte reelle Zahl α .

Die Reichhaltigkeit von \mathbb{R} läßt sich auf verschiedene Weise analytisch charakterisieren. Vom konstruktiven Standpunkt aus, das heißt: für das Definieren und das konkrete Berechnen von reellen Größen (z.B. e oder π), ist folgende Fassung am zweckmäßigsten:

(1.1) *Jede monoton wachsende und beschränkte Folge $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von reellen Zahlen ist konvergent gegen eine wohlbestimmte reelle Zahl α .*

┌ Für den Beweis benötigt man natürlich den genauen Konvergenzbegriff.
 — Wir spalten \mathbb{R} in die Untermenge A derjenigen ξ , die von wenigstens einem α_k übertroffen werden, und in die Obermenge B derjenigen ξ , die von keinem α_k übertroffen werden. Weder A noch B sind leer. Die Axt trifft eine wohlbestimmte Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$, und dieses α ist der behauptete Grenzwert: Ist ein (beliebig kleines) $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so liegt $\alpha - \varepsilon$ in A , es gibt also ein n mit $\alpha_n > \alpha - \varepsilon$. Wegen der Monotonie liegen daher alle α_k mit Nummer $k \geq n$ im Intervall $]\alpha - \varepsilon, \alpha]$. ┐

Die obige Vorstellung (d) läßt sich nunmehr folgendermaßen konkretisieren: Ein “unendlicher Dualbruch”, zum Beispiel

$$1.10110011101\dots,$$

besitzt Anfangsstücke

$$a_0 := 1, \quad a_1 := 1.1, \quad a_2 := 1.1, \quad a_3 := 1.101, \quad a_4 := 1.011, \quad \dots$$

Die a_k bilden eine monoton wachsende Folge von reellen Zahlen, und diese Folge ist natürlich beschränkt: Da alle Ziffern β_k gleich 0 oder 1 sind, gilt

$$a_n = a_0 + \sum_{k=1}^n \beta_k 2^{-k} \leq a_0 + \sum_{k=1}^n 2^{-k} < a_0 + 1$$

für alle n . Somit besitzt die Folge a nach (1.1) einen wohlbestimmten Grenzwert $\alpha \in \mathbb{R}$, und dieses α ist die von dem betreffenden “unendlichen Dualbruch” repräsentierte reelle Zahl.

Aufgaben

1. Stelle die folgenden rationalen Zahlen im Dualsystem dar:
(a) 6423, (b) 643/7, (c) 324/761.
2. Bestimme die ersten 15 Stellen der Dualbruchentwicklung von π .
3. Die Funktion f sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x + 2 & (x < -1) \\ -x & (-1 \leq x \leq 1) \\ x - 2 & (x > 1) \end{cases} .$$

Stelle f mit Hilfe der Betragsfunktion durch einen einzigen, für alle $x \in \mathbb{R}$ gültigen Ausdruck dar.

4. Beim Stand 165.50 seines Tageskilometerzählers passiert ein Automobilist eine Tafel “Landesgrenze 29 km” und beim Stand 173.20 die Tafel “Landesgrenze 22 km”. Beim Stand 179.45 kommt er zu einer Tankstelle. Wie weit ist es jetzt noch zur Landesgrenze (auf 150 m genau)? — Hierzu soll man annehmen, daß die Angaben auf den Tafeln nach der nächsten ganzen Zahl gerundet sind.
5. Die Funktionen $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seien rekursiv definiert durch

$$f_0(x) := |x|, \quad f_{n+1}(x) := |1 - f_n(x)| \quad (n \geq 0) .$$

Zeichne den Graphen von f_{100} .

6. Bestimme die Menge der $x \in \mathbb{R}$, welche die folgende Ungleichung erfüllen:

$$\frac{x+3}{x-1} > |x| .$$

1.5 Koordinaten in der Ebene und im Raum

In diesem Abschnitt werden nur Bezeichnungen festgelegt.

Wir beziehen uns zunächst auf die Fig. 1.5.1. Die im folgenden angebotenen Bezeichnungen werden wir in freier Weise abwechselnd benutzen:

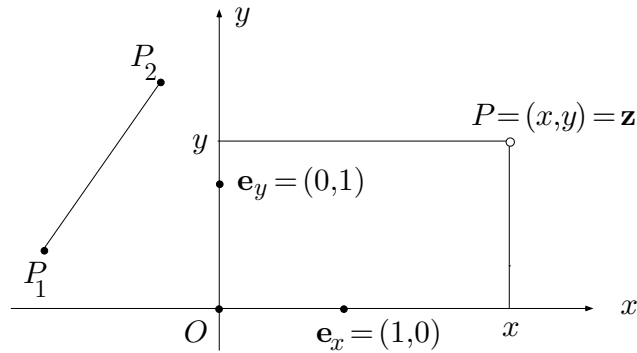


Fig. 1.5.1

Allgemeiner Punkt: $P = (x, y) = \mathbf{z}$;
 spezielle Punkte: $O = (0, 0) = \mathbf{0}$, $\mathbf{e}_x = (1, 0)$, $\mathbf{e}_y = (0, 1)$;
 Abstand vom Ursprung: $|OP| = \sqrt{x^2 + y^2} = |\mathbf{z}| = r$;
 Abstand zweier Punkte: $|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = |\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1|$.

Winkel und Argument

Sind \mathbf{z}_1 und \mathbf{z}_2 beide $\neq \mathbf{0}$, so bezeichnet $\angle(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$ den **nichtorientierten Winkel** zwischen den von $\mathbf{0}$ ausgehenden Strahlen durch \mathbf{z}_1 und durch \mathbf{z}_2 . Hierunter versteht man die Länge ω des kürzeren von den beiden Bögen, die die zwei Strahlen aus dem Einheitskreis herauschneiden (siehe die Fig. 1.5.2). Es ist immer $0 \leq \omega \leq \pi$.

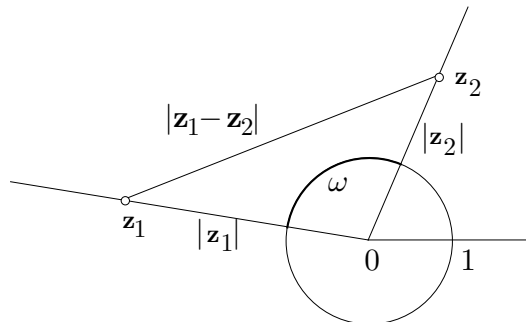


Fig. 1.5.2

Nach dem Cosinussatz ist

$$|\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1|^2 = |\mathbf{z}_1|^2 + |\mathbf{z}_2|^2 - 2|\mathbf{z}_1| |\mathbf{z}_2| \cos \omega$$

und somit

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2|\mathbf{z}_1| |\mathbf{z}_2| \cos \omega .$$

Es folgt

$$\cos \omega = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} .$$

Durch diese Gleichung ist $\omega \in [0, \pi]$ eindeutig bestimmt.

Der Gegenuhrzeigersinn wird als **positiver Drehsinn** angesehen. Mit dem Symbol $\mathfrak{A}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$ bezeichnen wir den **orientierten Winkel** zwischen den beiden Strahlen \mathbf{Oz}_1 und \mathbf{Oz}_2 . Hierunter versteht man den erforderlichen Drehwinkel, wenn der Strahl \mathbf{Oz}_1 in positivem Sinn in den Strahl \mathbf{Oz}_2 gedreht werden soll. Dieser orientierte Winkel ist nur bis auf additive Vielfache von 2π bestimmt (Fig. 1.5.3).

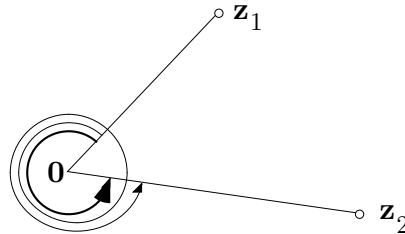


Fig. 1.5.3

Ob in einer gegebenen Situation mit orientierten oder besser mit nichtorientierten Winkeln gearbeitet werden soll, muß im Einzelfall entschieden werden. Nichtorientierte Winkel haben auch im dreidimensionalen Raum einen Sinn, orientierte nicht von vorneherein.

Ist $\mathbf{z} = (x, y) \neq \mathbf{0}$, so heißt

$$\mathfrak{A}(\mathbf{e}_x, \mathbf{z}) =: \arg(x, y) =: \phi$$

das **Argument** oder der **Polarwinkel** des Punktes \mathbf{z} . Der Figur 1.5.4 entnimmt man die Identität

$$\arg(x, y) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & (x > 0) \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & (x < 0) . \end{cases}$$

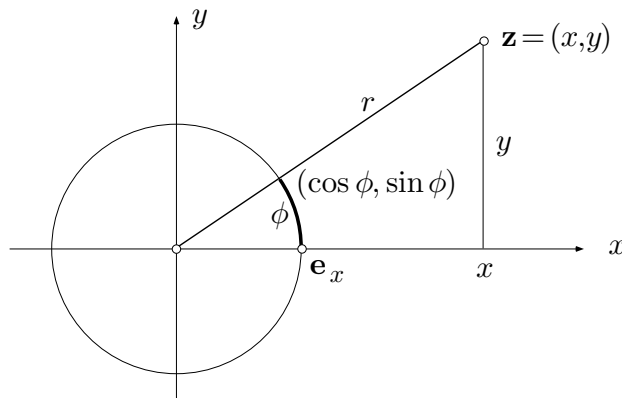


Fig. 1.5.4

Ohne weitergehende Verabredungen ist das Argument ϕ eines Punktes (x, y) nur bis auf additive Vielfache von 2π , oder, wie man auch sagt: **modulo** 2π bestimmt. Hierauf braucht man aber in vielen Fällen keine Rücksicht zu nehmen, und man kann ϕ wie eine gewöhnliche reelle Variable behandeln.

Die Größen r und ϕ heißen die **Polarkoordinaten** des Punktes (x, y) . Es gelten die folgenden Umrechnungsformeln, die man ohne weiteres an der Figur 1.5.4 verifiziert:

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \arg(x, y) \end{cases} .$$

Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine (stetige) Funktion der Variablen x , so beschreibt die Gleichung $y = f(x)$ bekanntlich eine (im folgenden mit $\mathcal{G}(f)$ bezeichnete) Kurve in der (x, y) -Ebene, den sogenannten **Graphen** von f :

$$\mathcal{G}(f) := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \wedge y = f(x) \} .$$

Ist weiter $h > 0$ fest, so ist der Graph der Funktion $f_h: x \mapsto f(x - h)$ zum Graphen von f kongruent, aber gegenüber $\mathcal{G}(f)$ um h nach rechts verschoben (Fig. 1.5.6).

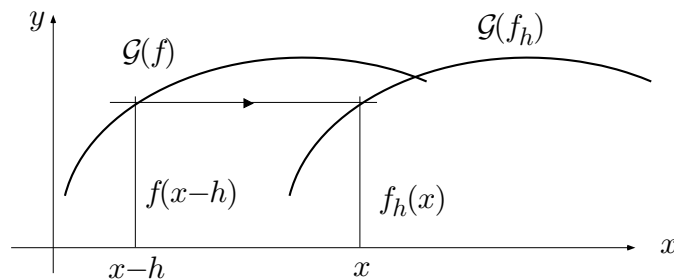


Fig. 1.5.5

Es sei jetzt $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine nichtnegative (stetige) Funktion der Variablen ϕ . Die Gleichung

$$r = f(\phi) \quad (\alpha \leq \phi \leq \beta), \quad (1)$$

zwischen den Polarkoordinaten r und ϕ der Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ läßt sich ebenfalls als Gleichung einer Kurve γ auffassen. Man nennt (1) die **Polar-darstellung** dieser Kurve. Die einzelnen Punkte von γ werden erhalten, indem man für jedes $\phi \in [\alpha, \beta]$ auf dem Strahl $\arg(x, y) = \phi$ von O aus die Länge $r := f(\phi)$ abträgt (Fig. 1.5.6). Weiter: Ist $\delta > 0$ fest, so ist die Kurve γ' mit der Polardarstellung

$$r = f(\phi - \delta) \quad (\alpha + \delta \leq \phi \leq \beta + \delta)$$

zu γ kongruent, aber gegenüber γ um den Winkel δ in positivem Sinn gedreht.

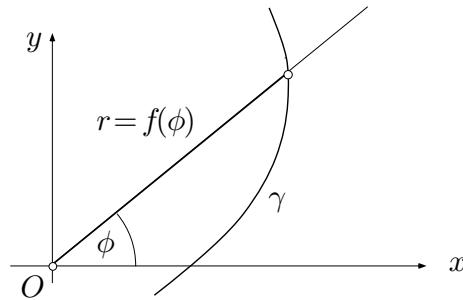


Fig. 1.5.6

① Es seien $a > 0$, $q \neq 0$ fest gegeben. Dann ist

$$\gamma: \quad r = ae^{q\phi} \quad (=: f(\phi)) \quad (-\infty < \phi < \infty)$$

die Polardarstellung einer **logarithmischen Spirale** (Fig. 1.5.7). Wird γ von O aus um den Faktor $c > 0$ gestreckt, so besitzt die resultierende Kurve γ_c die Polardarstellung

$$\gamma_c: \quad r = cae^{q\phi} \quad (=: f_c(\phi)).$$

Nun gilt (identisch in ϕ)

$$f_c(\phi) = ae^{q\phi + \log c} = ae^{q(\phi - \delta)} = f(\phi - \delta);$$

dabei wurde zur Abkürzung $-\log c/q =: \delta$ gesetzt. Hieraus folgt: γ_c ist *kongruent* zu γ (und nicht etwa "größer"), aber um den Winkel δ gegenüber γ

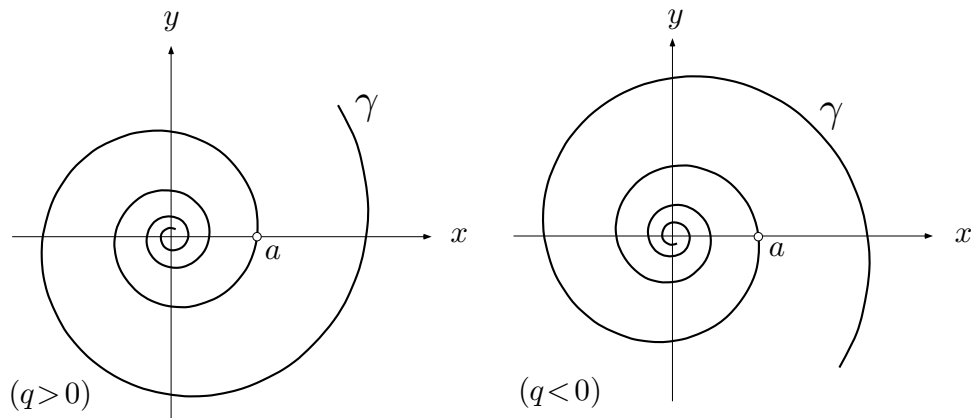


Fig. 1.5.7

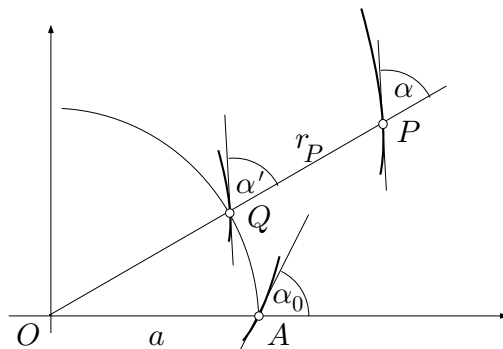


Fig. 1.5.8

gedreht. Auf dem Grabstein von Johann Bernoulli, der als erster die logarithmische Spirale untersucht hat, steht die Inschrift: “*Eadem mutata resurgo*”. Wir zeigen weiter: γ schneidet jeden von O ausgehenden Strahl unter demselben (nur von q abhängigen) Winkel α_0 .

□ Es sei P ein Spiralenpunkt im Abstand r_P vom Ursprung und α der fragliche Winkel bei P (Fig. 1.5.8). Wird die Spirale γ im Verhältnis $c := a/r_P$ von O aus gestreckt, so resultiert eine neue Spirale γ_c . Der Punkt P geht dabei über in den Punkt Q im Abstand a vom Ursprung, und γ_c schneidet dort den Strahl OP unter dem Winkel $\alpha' = \alpha$. Andererseits können wir nach dem Vorangehenden die Spirale γ_c auch erhalten, indem wir γ um den Winkel $\delta = -\log c/q$ drehen. Dabei geht der Punkt A in Q über, und es ist $\alpha' = \alpha_0$. Da $P \in \gamma$ beliebig war, folgt die Behauptung. ┘

○

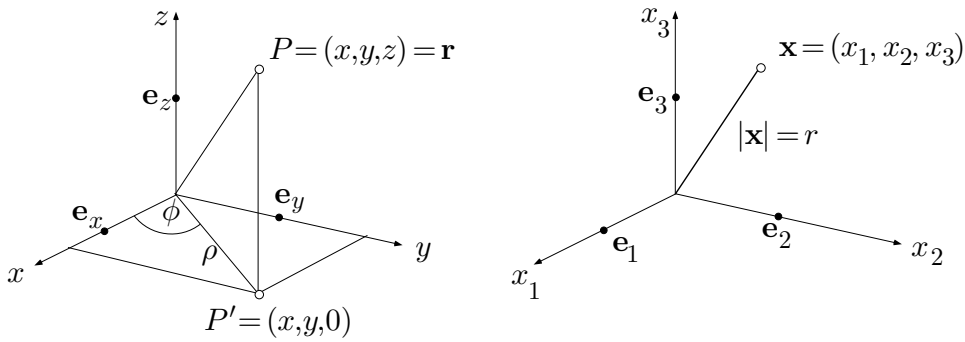


Fig. 1.5.9

Verschiedene räumliche Koordinatensysteme

Im dreidimensionalen Raum werden die kartesischen Koordinaten entweder mit x, y, z oder mit x_1, x_2, x_3 bezeichnet. Für die Behandlung von konkreten Beispielen, etwa eines Ellipsoids mit gegebenen Halbachsen a, b, c , sind x, y, z handlicher; bei allgemeinen Erörterungen aber sind x_1, x_2, x_3 unbedingt vorzuziehen. Die beiden Bezeichnungsweisen sind in der Figur 1.5.9 und in den folgenden Formeln festgehalten.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x &= (1, 0, 0) = \mathbf{e}_1, & \mathbf{e}_y &= (0, 1, 0) = \mathbf{e}_2, & \mathbf{e}_z &= (0, 0, 1) = \mathbf{e}_3; \\ |OP| &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |\mathbf{r}| = r & \text{bzw.} & & \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} &= |\mathbf{x}| = r; \\ |OP'| &= \sqrt{x^2 + y^2} = \rho. \end{aligned}$$

Werden dreidimensionale Situationen betrachtet, so ist es üblich, die Polarkoordinaten in der (x, y) -Ebene mit ρ, ϕ (anstelle von r, ϕ) zu bezeichnen. — Man beachte, daß wir in jedem Fall ein **Rechtssystem** zugrundelegen: Wird der Vektor \mathbf{e}_x um $\pi/2$ in die Richtung von \mathbf{e}_y gedreht, so rückt ein mitgedrehter Korkzieher in die Richtung von \mathbf{e}_z vor (Fig. 1.5.10).

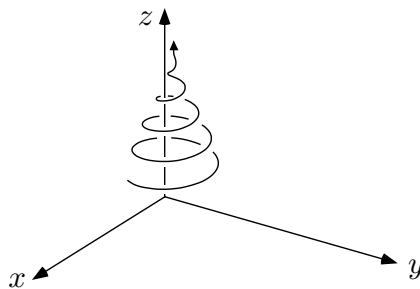


Fig. 1.5.10

Die durch $\arg(x, y) = \text{const.}$ charakterisierten Halbebenen M im (x, y, z) -Raum heißen **Meridianebenen**. Die Meridianebenen werden “nummeriert” durch die Argumentvariable ϕ , die laufenden kartesischen Koordinaten in einer Meridianebene sind ρ (≥ 0) und z (Fig. 1.5.11). Ist eine Situation rotationssymmetrisch bezüglich der z -Achse, so bietet sie in allen Meridianebenen denselben Aspekt, und dieser Aspekt lässt sich vollständig mit Hilfe der Variablen ρ und z beschreiben.

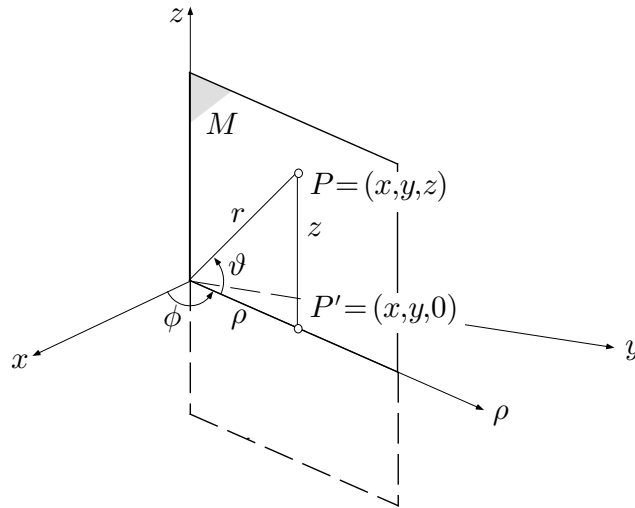


Fig. 1.5.11

Bsp: Eine Drehfläche S ist vollständig bestimmt durch ihre in der (ρ, z) -Halbebene liegende **Meridiankurve** γ_M (Fig. 1.5.12).

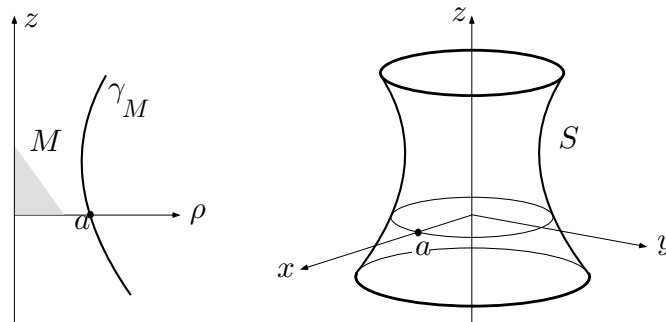


Fig. 1.5.12

Die angemessenen Koordinaten zur Behandlung einer derartigen Situation sind die **Zylinderkoordinaten** ρ, ϕ, z . Hier sind ρ und z die wesentlichen

Variablen; die Variable ϕ ist von diesen **separiert** und fällt in vielen Fällen aus der Rechnung heraus.

Um die Zylinderkoordinaten in kartesische Koordinaten umzurechnen, muß man sich nur vergegenwärtigen, daß ρ , ϕ gerade Polarkoordinaten in der (x, y) -Ebene sind (Fig. 1.5.11):

$$\begin{cases} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \\ z = z \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \arg(x, y) \\ z = z \end{cases} . \quad (2)$$

② Rotiert ein in der (ρ, z) -Halbebene gezeichneter Kreis um die z -Achse, so entsteht ein sogenannter **Torus**, genau: eine Torusfläche T (Fig. 1.5.13). Analytisch tritt T auf folgende Weisen in Erscheinung:

— Gleichung der Meridiankurve γ_M :

$$(\rho - a)^2 + z^2 = b^2 ,$$

— Gleichung des Torus in Zylinderkoordinaten (die Variable ϕ fällt heraus!):

$$(\rho - a)^2 + z^2 = b^2 ,$$

— Gleichung des Torus in kartesischen Koordinaten:

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2 ,$$

— Parameterdarstellung der Meridiankurve:

$$\gamma_M : \begin{cases} \rho = a + b \cos \psi \\ z = b \sin \psi \end{cases} \quad (0 \leq \psi \leq 2\pi) ,$$

— Parameterdarstellung des Torus:

$$T : \begin{cases} x = (a + b \cos \psi) \cos \phi \\ y = (a + b \cos \psi) \sin \phi \\ z = b \sin \psi \end{cases} \quad (0 \leq \psi \leq 2\pi , 0 \leq \phi \leq 2\pi) .$$

(Der Begriff der Parameterdarstellung wird erst in Abschnitt 2.1 offiziell eingeführt.) ○

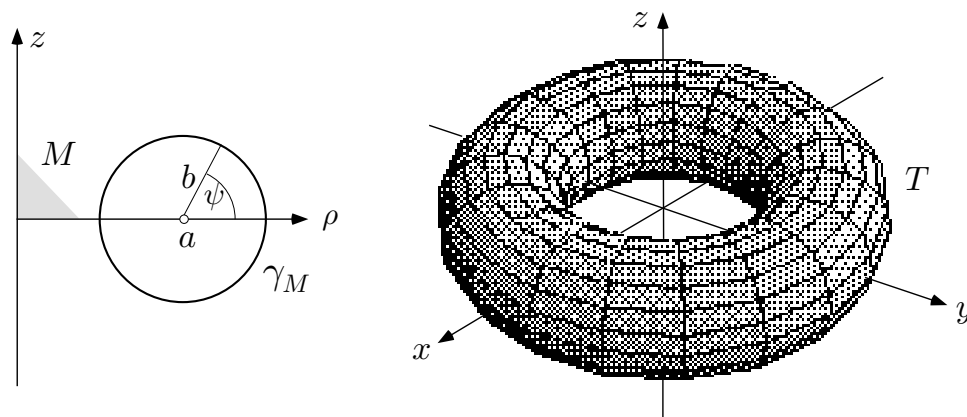


Fig. 1.5.13

Ersetzt man in den Meridianebenen M die (für M) kartesischen Koordinaten ρ, z durch Polarkoordinaten r, θ , so gelangt man zu den **Kugelkoordinaten** r, ϕ, θ ; dabei kann die Variable θ nur Werte im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ annehmen. Die Ortsbestimmung auf der Erdkugel erfolgt mit Kugelkoordinaten: ϕ ist die **geographische Länge**, θ die **geographische Breite**. (Anmerkung: Verschiedene Autoren messen den Winkel θ von der positiven z -Achse aus; θ variiert dann im Intervall $[0, \pi]$, und die nachstehenden Formeln sind geringfügig zu modifizieren.)

Aus der Figur 1.5.11 ergeben sich die Formeln

$$\begin{cases} \rho = r \cos \theta \\ z = r \sin \theta \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \begin{cases} r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \theta = \arg(\rho, z) \end{cases},$$

und mit (2) folgt

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \cos \phi \\ y = r \cos \theta \sin \phi \\ z = r \sin \theta \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \phi = \arg(x, y) \\ \theta = \arg(\sqrt{x^2 + y^2}, z) \end{cases}. \quad (3)$$

Hier ist vor allem der Formelsatz links von Bedeutung. Man benötigt ihn, um gegebene Gleichungen und Funktionsausdrücke von kartesischen auf Kugelkoordinaten umzuschreiben.

③ Eine Fliege besteigt einen halbkugelförmigen Pudding vom Radius 1; sie kann aber nicht steiler als 45° gehen (Fig. 1.5.14). Aufgabe: Die sich ergebende Kurve und deren Länge zu bestimmen.

Im (ϕ, θ) -Gradnetz sieht die Kurve etwa so aus, wie in Fig. 1.5.15 gezeichnet, denn am Anfang ($\theta = 0$) ist die Wand vertikal, und für $\theta \geq \frac{\pi}{4}$ kann die Fliege

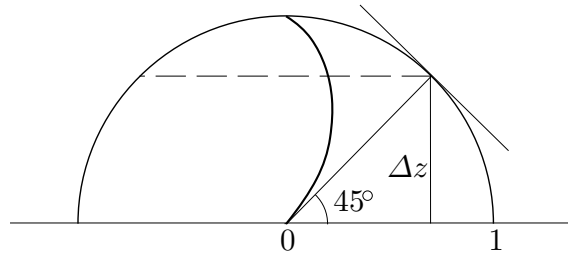


Fig. 1.5.14

direkt auf ihr Ziel lossteuern. Man hat daher

$$\phi = \begin{cases} u(\theta) & (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}) \\ \phi_0 & (\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

mit einer unbekanntem Funktion $u(\theta)$ und $u(\frac{\pi}{4}) =: \phi_0$.

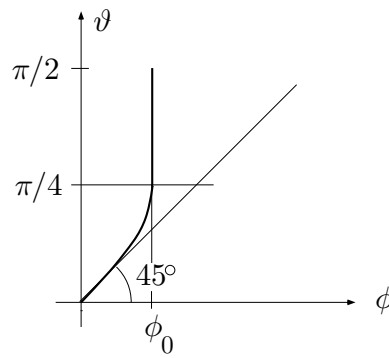


Fig. 1.5.15

Nach (3) besitzt die gesuchte Raumkurve in der ersten Phase folgende Parameterdarstellung:

$$\left. \begin{aligned} x(\theta) &= \cos \theta \cos u(\theta) \\ y(\theta) &= \cos \theta \sin u(\theta) \\ z(\theta) &= \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right). \quad (4)$$

Die 45°-Bedingung läuft darauf hinaus, daß

$$dz = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

ist (Fig. 1.5.16), und führt damit auf die Differentialgleichung

$$z'^2(\theta) = x'^2(\theta) + y'^2(\theta).$$

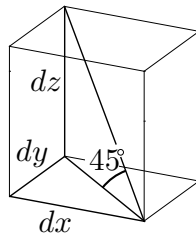


Fig. 1.5.16

Die nach Einsetzen von (4) resultierende Differentialgleichung für die unbekannte Funktion $u(\theta)$ können wir hier nicht behandeln. Hingegen können wir die Länge der gesuchten Kurve berechnen: In der ersten Phase ist die reale Steigung stets 45° . Da dabei die Höhe $\Delta z = \sqrt{2}/2$ gewonnen wird (Fig. 1.5.15), beträgt die Länge des zugehörigen Kurvenstücks $\sqrt{2} \Delta z = 1$. Die Gesamtlänge der Kurve ist daher $1 + \frac{\pi}{4}$. \circ

Aufgaben

- Die z -Achse sei Achse eines Rotationskegels bzw. -doppelkegels vom halben Öffnungswinkel $\frac{\pi}{6}$. Man gebe die Gleichung dieses Kegels
 - in kartesischen Koordinaten,
 - in Zylinderkoordinaten,
 - in Kugelkoordinaten.
- Es sei P ein Punkt einer logarithmischen Spirale im Abstand r vom Zentrum. Die Spirale schneide den Strahl OP unter dem Winkel α . Stelle Überlegungen an über die von P aus bis zum inneren "Ende" gemessene Länge der Spirale.
- Zeige: Wird die Kurve $y = ce^{\lambda x}$ ($-\infty < x < \infty$) in y -Richtung affin gestreckt, so ist die resultierende Kurve zur Ausgangskurve kongruent.
- Eine Fliege möchte möglichst schnell zur Spitze eines aufrechten Kreiskegels (Höhe h , halber Öffnungswinkel α) gelangen. Sie kann aber nicht steiler als 45° gehen. An welches "Bewegungsgesetz" soll sie sich halten? Wie sieht die entstehende Kurve γ von oben aus? Wie lang ist γ ? (*Hinweis:* Startet die Fliege im Punkt $(h \tan \alpha, 0, 0)$, so ist die Startrichtung eine Linearkombination der Vektoren $\mathbf{m} := (-\tan \alpha, 0, 1)$ und \mathbf{e}_2 .)
- Die Funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sei in Kugelkoordinaten durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$\tilde{f}(r, \theta, \phi) := r^2 (\sin(2\phi) \cos^2 \theta + (\sin \phi + \cos \phi) \sin(2\theta)) .$$

Bestimme den Ausdruck für f in kartesischen Koordinaten.

1.6 Vektoralgebra

Begriff des Vektors

Aus der Physik ist bekannt, daß gewisse Größen (zum Beispiel Kräfte, elektrische Feldstärke, Geschwindigkeiten) am besten als Pfeile oder eben als “Vektoren” dargestellt werden, die an einem bestimmten Raumpunkt “angreifen” oder in anderen Fällen frei parallel verschiebbar sind. Die “Vektorrechnung” handelt vom praktischen Umgang mit derartigen Größen; sie wurde in erster Linie im Hinblick auf physikalische Anwendungen erdacht und funktioniert so nur im \mathbb{R}^3 .

Mathematisch treten die Vektoren auf verschiedene Arten in Erscheinung:

- als gerichtete Strecken \underline{AB} , dargestellt als “Pfeil von A nach B ”,
- als Ortsvektoren von Punkten,
- als “Äquivalenzklassen von gerichteten Strecken”
- als halbfette oder mit einem Pfeil versehene kleine Buchstaben: \mathbf{a} , \vec{x} ,
- als Zahlentripel (a_1, a_2, a_3) , oft als Kolonnenvektoren $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ und selten als Zeilenvektoren $[a_1 \ a_2 \ a_3]$.

Diese Vielfalt der Auffassungen und Darstellungen hat zur Folge, daß man sich erst nach einiger Übung in der Welt der Vektoren zurechtfindet.

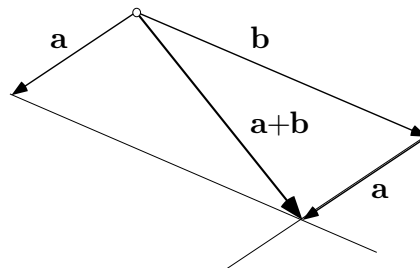


Fig. 1.6.1

Zur Einführung der Vektoren bedienen wir uns der Sprache der Elementargeometrie. So wird die Summe $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ von zwei Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} anhand der Figur 1.6.1 (“Parallelogramm der Kräfte”) definiert und ähnlich für jeden Vektor \mathbf{a} und eine beliebige Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ das λ -fache des Vektors \mathbf{a} geometrisch erklärt (s.u.). Im einzelnen sieht das etwa folgendermaßen aus (wir verzichten natürlich auf einen strengen Aufbau):

Ein geordnetes Paar von Punkten $A, B \in \mathbb{R}^3$ bezeichnen wir im jetzigen Zusammenhang mit \underline{AB} und nennen \underline{AB} einen **im Punkt A angreifenden**

Vektor oder, etwas ungenau, einen **Vektor**. Wir zeichnen dafür einen Pfeil mit Anfangspunkt A und Spitze in B . Der Vektor \underline{OB} heißt **Ortsvektor** des Punktes B (siehe die Fig. 1.6.2).

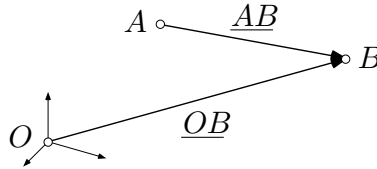


Fig. 1.6.2

Sind die Strecken AB und CD gleich lang und gleichsinnig parallel, das heißt: Gibt es eine Translation $\tau : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\tau(A) = C$ und $\tau(B) = D$, so werden \underline{AB} und \underline{CD} für die Zwecke der Vektorrechnung als **äquivalent**, d.h. als Repräsentanten desselben **Vektors** \mathbf{v} angesehen (Fig. 1.6.3). Man schreibt (unter Mißbrauch des Gleichheitszeichens) $\underline{AB} = \underline{CD} =: \mathbf{v}$, wobei eben in \mathbf{v} keine Information mehr über den Angriffspunkt vorhanden ist. Für Vektoren verwenden wir wenn immer möglich halbfette lateinische Buchstaben.

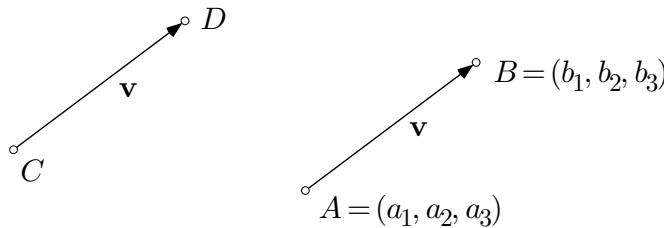


Fig. 1.6.3

Der **Betrag** oder die **Länge** eines Vektors \mathbf{v} ist gleich der Länge jeder repräsentierenden Strecke:

$$|\mathbf{v}| := |\underline{AB}| .$$

Die **Koordinaten** des Vektors $\mathbf{v} := \underline{AB}$ sind die drei Zahlen

$$(v_1, v_2, v_3) := (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) .$$

Ist $\underline{AB} = \underline{CD}$, so liefert das Paar \underline{CD} dieselben Koordinatendifferenzen wie \underline{AB} ; die Koordinaten (v_1, v_2, v_3) eines Vektors \mathbf{v} sind also wohldefiniert. Insbesondere ist, unter Mißbrauch des Gleichheitszeichens,

$$\underline{OB} = (b_1, b_2, b_3) =: \mathbf{b} ,$$

was zum Ausdruck bringt, daß ein Punkt und sein Ortsvektor als dasselbe Ding angesehen werden können. Der Buchstabe \mathbf{b} bezeichnet also (Fig. 1.6.4):

- den Punkt B ,
- das Tripel (b_1, b_2, b_3) ,
- den Ortsvektor \underline{OB} ,
- irgendeinen zu \underline{OB} äquivalenten Vektor.

Daran muß man sich gewöhnen.

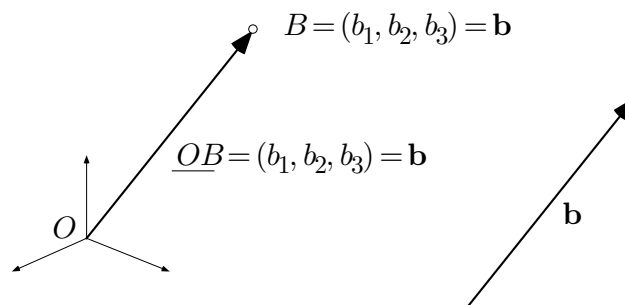


Fig. 1.6.4

Summe und skalare Vielfache von Vektoren

Die **Summe** $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ zweier Vektoren ist geometrisch durch die bekannte Figur 1.6.1 erklärt, in Koordinaten ist

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3),$$

wobei man beweisen müßte, daß diese “analytische Definition” auf dasselbe hinausläuft wie die geometrische. Die Addition von Vektoren ist kommutativ und assoziativ:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}.$$

Ferner gibt es zu jedem Vektor $\underline{AB} =: \mathbf{v}$ den **entgegengesetzten Vektor** $-\mathbf{v} := \underline{BA}$ (siehe die Fig. 1.6.5); es ist

$$-\mathbf{v} = (-v_1, -v_2, -v_3), \quad \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad (\text{Nullvektor}).$$

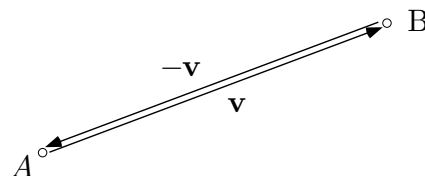


Fig. 1.6.5

Durch

$$\mathbf{b} - \mathbf{a} := \mathbf{b} + (-\mathbf{a})$$

ist dann auch die Subtraktion definiert, und es gelten die üblichen Rechenregeln. Insbesondere ist (Fig. 1.6.6)

$$\underline{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} .$$

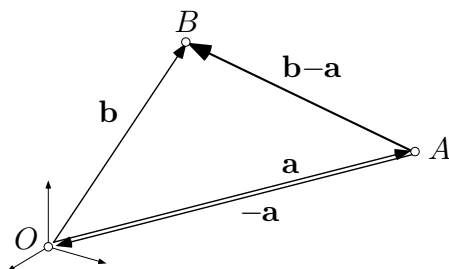


Fig. 1.6.6

Ist weiter $\lambda \in \mathbb{R}$ eine beliebige Zahl (in diesem Zusammenhang als **Skalar** bezeichnet), so ist $\lambda \mathbf{a}$ erklärt durch die Figur 1.6.7 und die Festsetzung

$$|\lambda \mathbf{a}| := |\lambda| |\mathbf{a}| .$$

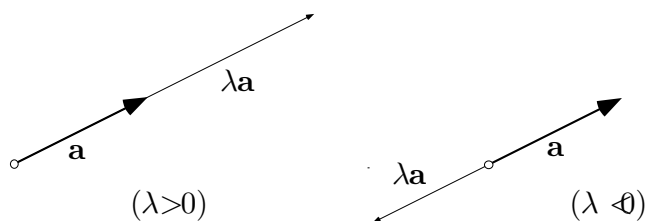


Fig. 1.6.7

Wie erwartet, gilt dann in Koordinaten

$$\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) ;$$

ferner hat man die plausiblen Rechenregeln

$$\begin{aligned} 0 \mathbf{a} &= \mathbf{0}, & 1 \mathbf{a} &= \mathbf{a}, & (-1) \mathbf{a} &= -\mathbf{a}, \\ \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}, & (\lambda + \mu) \mathbf{a} &= \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a} \end{aligned}$$

und andere.

Ein Vektor \mathbf{e} der Länge 1 ist ein **Einheitsvektor**. Die Spitzen der in O angehefteten Einheitsvektoren bilden zusammen die (zweidimensionale) **Einheitssphäre**

$$S^2 := \{ \mathbf{e} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{e}| = 1 \} .$$

Zu jedem Vektor $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ erhält man durch **Normierung** einen Einheitsvektor \mathbf{e} , der in dieselbe Richtung zeigt wie \mathbf{a} , und zwar ist \mathbf{e} gegeben durch (Fig. 1.6.8)

$$\mathbf{e} := \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a} .$$

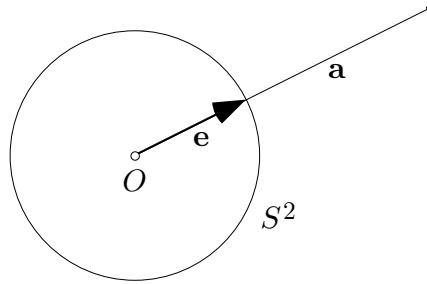


Fig. 1.6.8

Jeder Vektor \mathbf{x} läßt sich (in eindeutiger Weise) als **Linearkombination** der drei **Basisvektoren** \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 darstellen (Fig. 1.6.9):

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{k=1}^3 x_k \mathbf{e}_k .$$

Die drei Vektoren $x_k \mathbf{e}_k$ ($1 \leq k \leq 3$) sind die **Komponenten** von \mathbf{x} in den drei Achsenrichtungen.

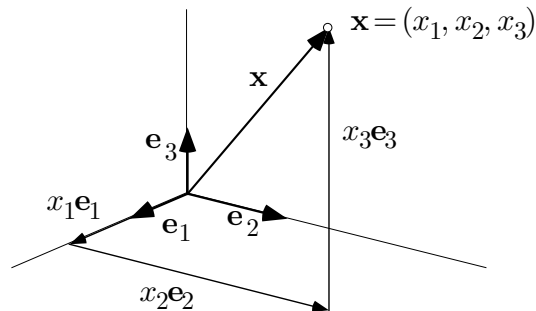


Fig. 1.6.9

Bemerkung: Der dreidimensionale Raum, versehen mit der hier behandelten additiven Struktur, ist dem allgemeinen Begriff des **Vektorraums** Pate gestanden. Hierunter versteht man ein System von irgendwelchen Objekten, genannt **Vektoren**, die unter sich addiert und mit Skalaren $\lambda \in \mathbb{R}$ gestreckt werden können, so daß die “üblichen Rechenregeln” gelten.

① Die Lösungsmenge \mathcal{L} der Differentialgleichung

$$y'''' = 0$$

ist nicht eine Menge von Zahlen (oder von Punkten (x, y)), sondern eine Menge von Funktionen: Gesucht sind diejenigen Funktionen $t \mapsto y(t)$, für die $y''''(t) \equiv 0$ ist. Wie man sich leicht überlegt, besteht \mathcal{L} aus den sämtlichen Polynomen

$$p(t) := \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 \quad (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}).$$

Die Menge \mathcal{L} ist somit nicht einfach “ein Sack voll Funktionen”, sondern besitzt eine bestimmte algebraische Struktur: \mathcal{L} ist ein vierdimensionaler Vektorraum. Die vier Monome

$$e_k(\cdot): \quad t \mapsto t^k \quad (0 \leq k \leq 3)$$

bilden eine Basis dieses Vektorraums, und jedes $p(\cdot) \in \mathcal{L}$ ist eine wohlbestimmte Linearkombination der $e_k(\cdot)$. Für das angeschriebene $p(\cdot)$ sieht das folgendermaßen aus:

$$p(\cdot) = \sum_{k=0}^3 \alpha_k e_k(\cdot).$$

○

② Gegeben sind N Punktmassen m_i in den Punkten A_i ($1 \leq i \leq N$). Gesucht ist der sogenannte Schwerpunkt dieses Systems (Fig. 1.6.10). — Beachte: Der Index i nummeriert die Punkte, nicht die Koordinatenvariablen, die wir hier übungshalber mit x, y, z bezeichnen.

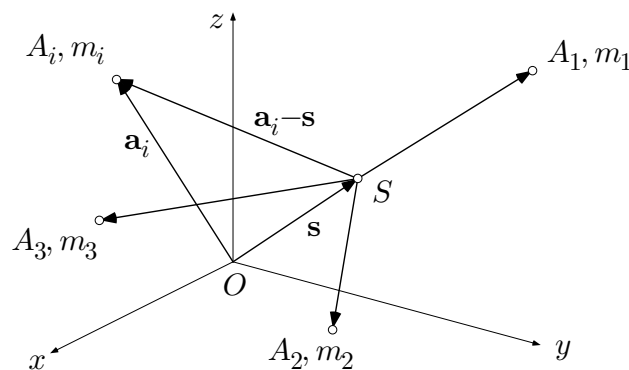


Fig. 1.6.10

Der **Schwerpunkt** S ist definiert durch die sogenannte **Momentenbedingung**

$$\sum_{i=1}^N m_i \underline{SA}_i = \mathbf{0} .$$

Wegen $\underline{SA}_i = \mathbf{a}_i - \mathbf{s}$ folgt

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{a}_i - \mathbf{s}) = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i - \left(\sum_{i=1}^N m_i \right) \mathbf{s}$$

und somit

$$\mathbf{s} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i / \sum_{i=1}^N m_i ; \quad (1)$$

in Worten: \mathbf{s} ist das gewichtete Mittel der \mathbf{a}_i . Sind alle Massen m_i gleich, so hebt sich der gemeinsame Wert heraus, und man hat

$$\mathbf{s} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i .$$

In Koordinaten sieht das folgendermaßen aus: Es sei

$$\mathbf{a}_i = (x_i, y_i, z_i) \quad (1 \leq i \leq N)$$

und $\mathbf{s} = (\xi, \eta, \zeta)$. Die Formel (1) gilt dann auch "koordinatenweise":

$$\xi = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \quad \eta = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}, \quad \zeta = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}. \quad \bigcirc$$

③ Gegeben sind ein Punkt A mit Ortsvektor \mathbf{a} und ein Vektor $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$. Die Gerade g durch A in Richtung \mathbf{p} hat folgende Parameterdarstellung, wobei \mathbf{x} den Ortsvektor des laufenden Punktes $X \in g$ bezeichnet:

$$g: \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{p} \quad (-\infty < t < \infty) .$$

Insbesondere ist $\mathbf{x}(0) = A$, $\mathbf{x}(1) = B$ (Fig. 1.6.11). Beachte: Dieselbe Gerade kann verschiedene derartige Parameterdarstellungen haben, da zum Beispiel der "Anfangspunkt" A durch g nicht vorbestimmt ist.

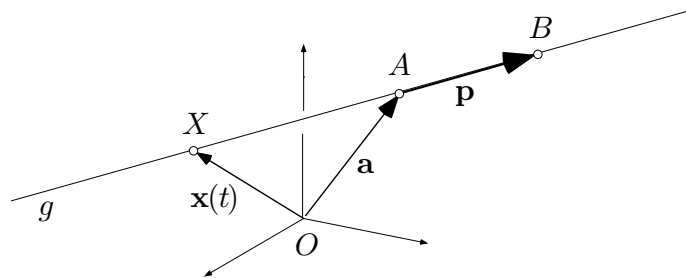


Fig. 1.6.11

Bsp: Gegeben seien $A := (2, 1, 7)$ und $\mathbf{p} := \frac{1}{3}(2, -2, 1)$. Der Vektor \mathbf{p} ist ein Einheitsvektor. Verwenden wir Koordinaten x, y, z , so haben wir

$$g: \quad \mathbf{r}(t) = (2, 1, 7) + \frac{t}{3}(2, -2, 1) \quad (-\infty < t < \infty)$$

bzw.

$$\left. \begin{array}{l} x(t) = 2 + \frac{2}{3}t \\ y(t) = 1 - \frac{2}{3}t \\ z(t) = 7 + \frac{1}{3}t \end{array} \right\} \quad (-\infty < t < \infty).$$

Eine Parameterdarstellung der Ebene Σ durch drei gegebene Punkte A, B, C erhält man folgendermaßen (Fig. 1.6.12): Setze $\mathbf{p} := \underline{AB}$, $\mathbf{q} := \underline{AC}$. Dann wird Σ produziert durch

$$\Sigma: \quad \mathbf{x}(u, v) = \mathbf{a} + u\mathbf{p} + v\mathbf{q} \quad (-\infty < u < \infty, -\infty < v < \infty).$$

Man beachte, daß wir zur Parameterdarstellung einer sogenannten ‐zweidimensionalen Mannigfaltigkeit‐, *volgo*: Fläche, zwei Parameter u, v benötigen. ○

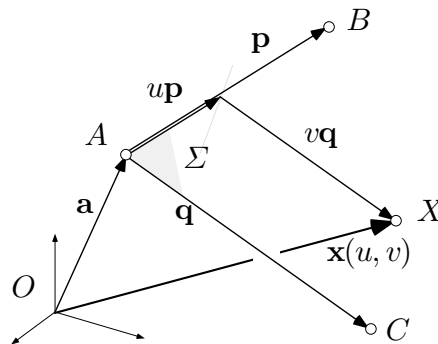


Fig. 1.6.12

Skalarprodukt

Je zwei Vektoren \mathbf{a}, \mathbf{b} lassen sich auf zwei Arten miteinander multiplizieren. Wir behandeln zunächst das sogenannte Skalarprodukt, auch **inneres Produkt** genannt. Hier ist das Resultat der Multiplikation eine *Zahl*.

Sind die beiden Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} beide $\neq \mathbf{0}$, so ist der nichtorientierte Winkel $\phi := \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ wohldefiniert (Fig. 1.6.13). Das **Skalarprodukt** von \mathbf{a} und \mathbf{b} ist dann geometrisch erklärt durch

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \phi \quad (\implies \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2) .$$

Das Skalarprodukt ist

> 0 , wenn \mathbf{a} und \mathbf{b} einen spitzen Winkel einschließen,

$= 0$, wenn \mathbf{a} und \mathbf{b} aufeinander senkrecht stehen,

< 0 , wenn \mathbf{a} und \mathbf{b} einen stumpfen Winkel einschließen,

und definitionsgemäß

$= 0$, wenn $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ oder $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ist.

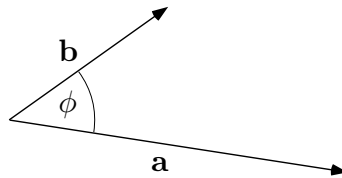


Fig. 1.6.13

(1.2) Das Skalarprodukt ist eine **symmetrische bilineare Funktion** von zwei Vektorvariablen, das heißt: Es gilt

(a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} ,$

(b) $\lambda \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) ,$

(c) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{y} .$

□ (a) und (b) sind ziemlich klar. Beim Beweis des Distributivgesetzes (c) dürfen wir wegen (b) annehmen, \mathbf{a} sei ein Einheitsvektor, den wir im weiteren mit \mathbf{e} bezeichnen und festhalten. Jeder Vektor \mathbf{x} besitzt eine wohlbestimmte Orthogonalprojektion in die Richtung von \mathbf{e} . Bezeichnen wir diese **e-Komponente** von \mathbf{x} mit \mathbf{x}_e , so gilt (Fig. 1.6.14):

$$\mathbf{x}_e = |\mathbf{x}| \cos \phi \mathbf{e} = |\mathbf{x}| |\mathbf{e}| \cos \phi \mathbf{e}$$

und somit nach Definition des Skalarprodukts:

$$\mathbf{x}_e = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{e} . \tag{2}$$

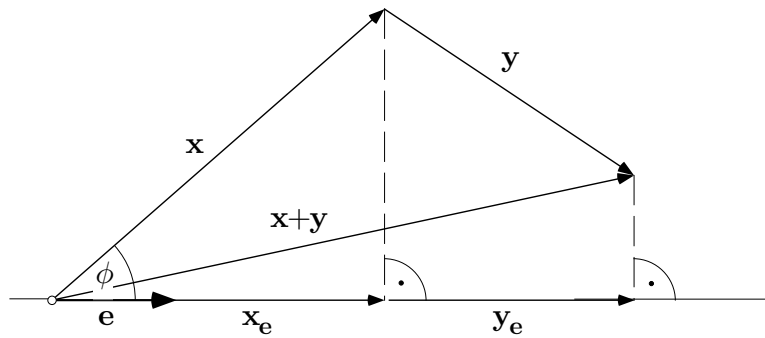


Fig. 1.6.14

Wie man der Figur entnimmt, ist

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y})_e = \mathbf{x}_e + \mathbf{y}_e$$

und somit wegen (2):

$$(\mathbf{e} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y})) \mathbf{e} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{e} + (\mathbf{e} \cdot \mathbf{y}) \mathbf{e} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{e} \cdot \mathbf{y}) \mathbf{e} .$$

Hieraus folgt (c) durch Koeffizientenvergleich. ┘

Da die drei Basis-Einheitsvektoren \mathbf{e}_i paarweise aufeinander senkrecht stehen, gilt

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = 0$$

oder in anderer Schreibweise:

$$\forall i, \forall k: \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{ik} ,$$

wobei das praktische **Kronecker-Delta** folgendermaßen definiert ist:

$$\delta_{ik} := \begin{cases} 1 & (i = k), \\ 0 & (i \neq k). \end{cases}$$

Damit sind wir auch imstande, das Skalarprodukt “in Koordinaten auszudrücken”: Ist $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, so können wir schreiben

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i ,$$

analog für \mathbf{b} . Aufgrund der Bilinearität ergibt sich daher

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \left(\sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^3 b_k \mathbf{e}_k \right) \\ &= \sum_{i,k} a_i b_k (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k) = \sum_{i,k} a_i b_k \delta_{ik} . \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite geben nur die drei Summanden mit $i = k$ einen Beitrag, und wir erhalten die Formel

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

die auch als “analytische Definition” des Skalarprodukts bezeichnet wird.

④ Der von zwei Vektoren \mathbf{a} , \mathbf{b} (beide $\neq \mathbf{0}$) eingeschlossene Winkel $\phi := \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ist bestimmt durch

$$\cos \phi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Bsp: Für $\mathbf{a} := (-2, -1, 2)$ und $\mathbf{b} := (2, 2, 0)$ ergibt sich

$$\cos \phi = \frac{(-2) \cdot 2 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 0}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{8}} = -\frac{1}{\sqrt{2}};$$

folglich ist $\phi = 3\pi/4$. ○

⑤ Gegeben sind ein Einheitsvektor \mathbf{n} und ein Punkt $A = (a_1, a_2, a_3)$. Gesucht ist die Gleichung der Ebene Σ , die auf \mathbf{n} senkrecht steht und durch A geht.

Betrachte einen allgemeinen Raumpunkt X . Es gilt (Fig. 1.6.15):

$$\begin{aligned} X \in \Sigma &\iff \mathbf{x}_n = \mathbf{d} = \mathbf{a}_n \stackrel{(*)}{\iff} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{n} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{n} \\ &\iff \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}, \end{aligned}$$

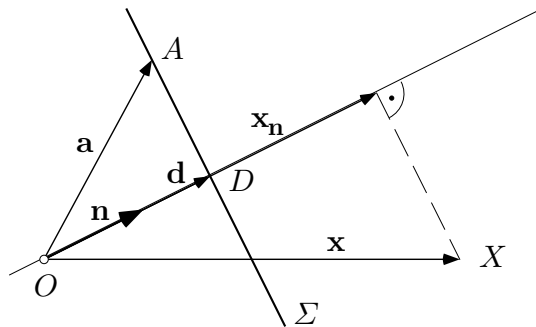


Fig. 1.6.15

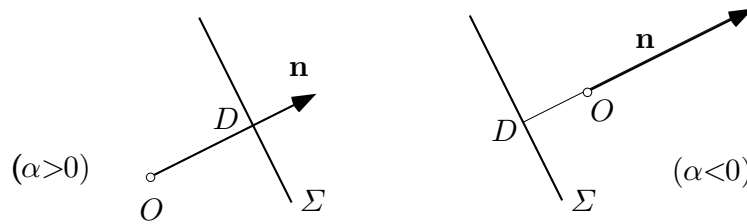


Fig. 1.6.16

wobei wir an der Stelle (*) die Formel (2) verwendet haben. Die rechte Seite dieser Schlußkette ist die vektorielle Gestalt der gesuchten Ebenengleichung. Es sei zum Beispiel $\mathbf{n} := \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ und $A := (5, 1, -3)$. Dann lautet die zugehörige Ebenengleichung in Koordinaten:

$$\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = \frac{2}{3} \cdot 5 - \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3}(-3) = 1.$$

Es sei $\mathbf{d} = \alpha \mathbf{n}$ und somit $|\alpha|$ der Abstand der Ebene Σ vom Ursprung (Fig. 1.6.16). Betrachtet man anstelle von A den Punkt D als vorgegebenen Punkt, so erhält man als Ebenengleichung

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{d}.$$

Wegen $\mathbf{n} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{n} \cdot (\alpha \mathbf{n}) = \alpha$ können wir dies in der Form

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \alpha \quad (|\mathbf{n}| = 1)$$

schreiben, wobei nun α eine geometrische Bedeutung hat und der durch Σ nicht vorbestimmte Punkt A nicht in Erscheinung tritt. \bigcirc

⑥ Gesucht ist die Gleichung des Doppelkegels K mit Spitze S , Achsenrichtung \mathbf{a} und halbem Öffnungswinkel ω .

Wir betrachten wieder einen allgemeinen Raumpunkt X . Mit den Bezeichnungen der Fig. 1.6.17 gilt:

$$\begin{aligned} X \in K &\iff \phi = \omega \vee \phi = \pi - \omega \iff \cos^2 \phi = \cos^2 \omega \\ &\iff \frac{((\mathbf{x} - \mathbf{s}) \cdot \mathbf{a})^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{s}|^2 \cdot |\mathbf{a}|^2} = \cos^2 \omega \\ &\iff ((\mathbf{x} - \mathbf{s}) \cdot \mathbf{a})^2 = |\mathbf{x} - \mathbf{s}|^2 |\mathbf{a}|^2 \cos^2 \omega, \end{aligned}$$

wobei wir an der Stelle (*) das Ergebnis von Beispiel ④ verwendet haben. Die letzte Gleichung ist die gesuchte Kegelgleichung.

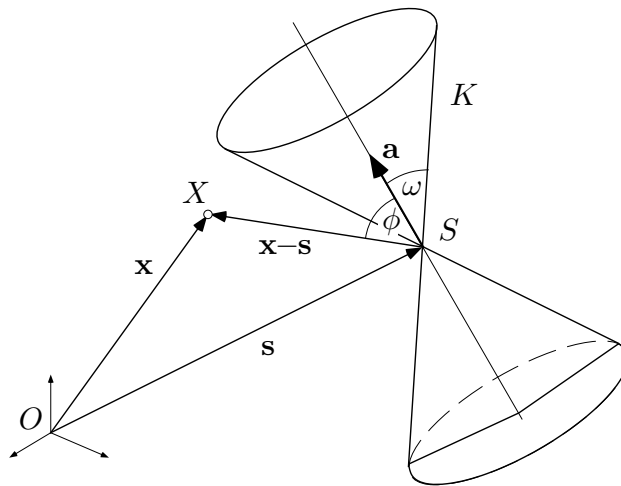


Fig. 1.6.17

Bsp: Für $\mathbf{s} := \mathbf{0}$, $\mathbf{a} := (1, 1, 1)$ und $\cos \omega := 1/\sqrt{3}$ wird

$$(\mathbf{x} - \mathbf{s}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = x_1 + x_2 + x_3 .$$

Damit erhält man die Kegelgleichung

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} ,$$

vereinfacht:

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0 .$$

Die drei Koordinatenachsen sind Mantellinien dieses Kegels. ○

Vektorprodukt

Die r Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ heißen **linear unabhängig**, wenn sie einen r -dimensionalen Teilraum des \mathbb{R}^3 aufspannen. Ein Vektor ist linear unabhängig, wenn er $\neq \mathbf{0}$ ist; zwei Vektoren sind linear unabhängig, wenn sie eine Ebene aufspannen, drei Vektoren, wenn sie den ganzen Raum aufspannen, das heißt: wenn sie nicht in einer Ebene liegen (Fig. 1.6.18).

Das **Vektorprodukt** $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (ein Vektor!) der zwei Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} ist wie folgt definiert: Sind \mathbf{a} und \mathbf{b} linear abhängig, so ist $\mathbf{a} \times \mathbf{b} := \mathbf{0}$. Sind \mathbf{a} und \mathbf{b} linear unabhängig, so ist $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ festgelegt durch (Fig. 1.6.19):

- $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| := |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \phi$,
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ steht senkrecht auf \mathbf{a} und auf \mathbf{b} ,
- die drei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

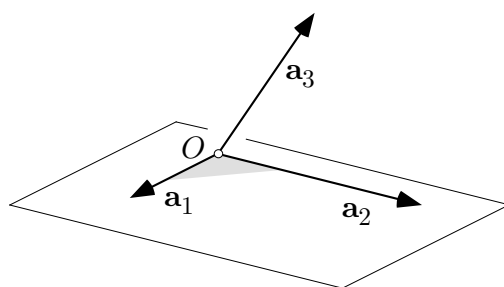


Fig. 1.6.18

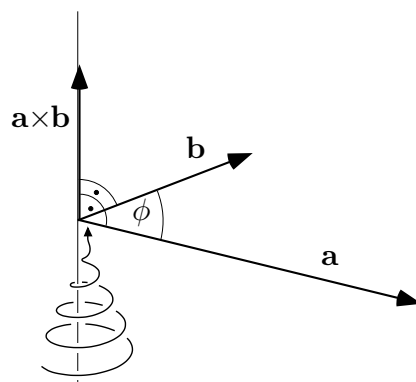


Fig. 1.6.19

Folgerungen:

- (a) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \iff \mathbf{a}$ und \mathbf{b} sind linear abhängig.

Merke: Verschwinden des Skalarprodukts signalisiert die Orthogonalität, Verschwinden des Vektorprodukts die lineare Abhängigkeit von zwei Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} .

- (b) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ ist der Flächeninhalt des von \mathbf{a} und \mathbf{b} aufgespannten Parallelogramms (Fig. 1.6.20).

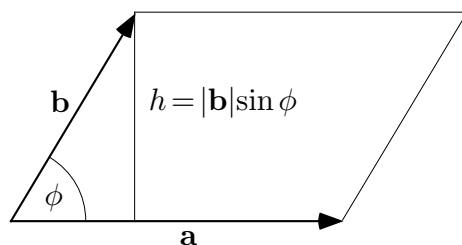


Fig. 1.6.20

- (c) $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}.$
 (d) $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{0};$
 $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2,$
 bzw. $\forall i: \quad \mathbf{e}_{i+1} \times \mathbf{e}_{i+2} = \mathbf{e}_i.$

In der letzten Formel ist die Indexvariable i "modulo 3" zu nehmen, siehe auch die Fig. 1.6.21.

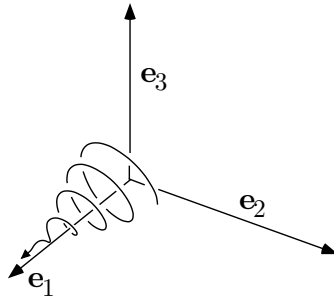


Fig. 1.6.21

(1.3) Das Vektorprodukt im \mathbb{R}^3 ist eine schiefsymmetrische bilineare vektorwertige Funktion von zwei Vektorvariablen. Insbesondere gilt

- (a) $\lambda \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \lambda (\mathbf{a} \times \mathbf{b}),$
 (b) $\mathbf{a} \times (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x} + \mathbf{a} \times \mathbf{y}.$

□ (a) ist ziemlich klar. — Beim Beweis von (b) dürfen wir annehmen, \mathbf{a} sei ein Einheitsvektor, den wir im weiteren mit \mathbf{e} bezeichnen und festhalten. Es seien E die zu \mathbf{e} senkrechte Ebene durch $\mathbf{0}$, weiter $P: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Orthogonalprojektion auf E und $D: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Drehung um die Achse \mathbf{e} um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ (Fig. 1.6.22). Wir behaupten, es gilt

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3: \quad D(P(\mathbf{x})) = \mathbf{e} \times \mathbf{x}. \quad (3)$$

Der Figur entnimmt man

$$|D(P(\mathbf{x}))| = |P(\mathbf{x})| = |\mathbf{x}| \sin \phi = |\mathbf{x}| |\mathbf{e}| \sin \phi = |\mathbf{e} \times \mathbf{x}|,$$

und die Richtung stimmt auch. Damit ist (3) bewiesen.

Aus $P(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = P(\mathbf{x}) + P(\mathbf{y})$ und der analogen Identität $D(\mathbf{x}' + \mathbf{y}') = D(\mathbf{x}') + D(\mathbf{y}')$, angewandt auf $\mathbf{x}' := P(\mathbf{x})$ und $\mathbf{y}' := P(\mathbf{y})$, folgt nun

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \times (\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= D(P(\mathbf{x} + \mathbf{y})) = D(P(\mathbf{x}) + P(\mathbf{y})) = D(P(\mathbf{x})) + D(P(\mathbf{y})) \\ &= \mathbf{e} \times \mathbf{x} + \mathbf{e} \times \mathbf{y}. \end{aligned} \quad \square$$

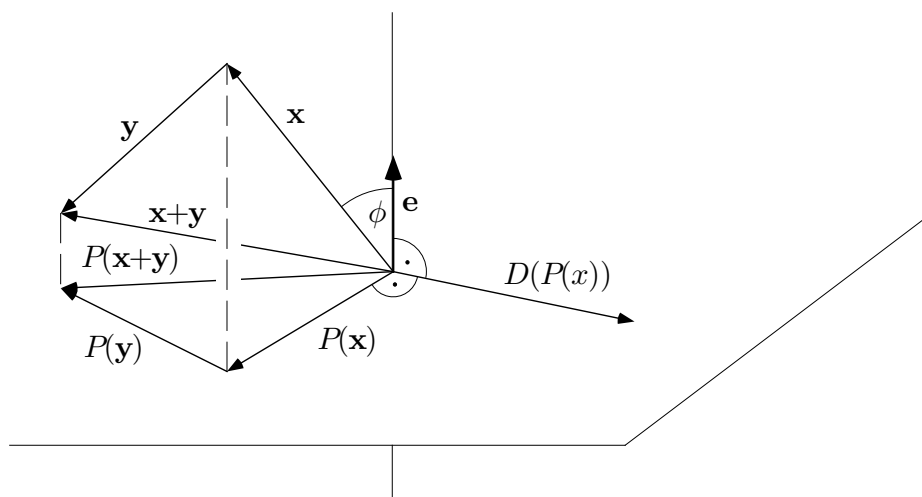


Fig. 1.6.22

Wir können nunmehr auch das Vektorprodukt “in Koordinaten” ausdrücken. Aus

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$$

folgt mit (1.3) und Folgerung (d):

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= a_1b_1 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 + a_1b_2 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 + a_1b_3 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 + \dots \\ &= \mathbf{0} + a_1b_2 \mathbf{e}_3 - a_1b_3 \mathbf{e}_2 + \dots \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_1 + \dots, \end{aligned}$$

wobei wir hier die Rechnung nur unvollständig wiedergegeben haben. Damit ergibt sich als “analytische Definition” des Vektorprodukts die Formel

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

(zyklische Vertauschung!). Eine praktische Merkregel fürs Kopfrechnen ist der Fig. 1.6.23 zu entnehmen.

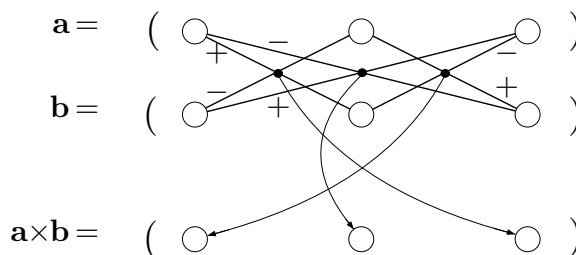


Fig. 1.6.23

$$\begin{aligned} \text{Bsp:} \quad \mathbf{a} &= (2, -3, 5) \\ \mathbf{b} &= (-1, 7, 4) \\ \hline \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (-47, -13, 11) \end{aligned}$$

⑦ Gegeben sind eine Gerade

$$g: \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{p}$$

sowie ein Punkt Y (Fig. 1.6.24). Gesucht ist eine vektorielle Formel für den Abstand d des Punktes Y von der Geraden g . Man erhält

$$d = |\mathbf{y} - \mathbf{a}| \sin \phi = \frac{1}{|\mathbf{p}|} |\mathbf{p}| |\mathbf{y} - \mathbf{a}| \sin \phi$$

und somit nach Definition des Vektorprodukts:

$$d = \frac{|\mathbf{p} \times (\mathbf{y} - \mathbf{a})|}{|\mathbf{p}|} .$$

○

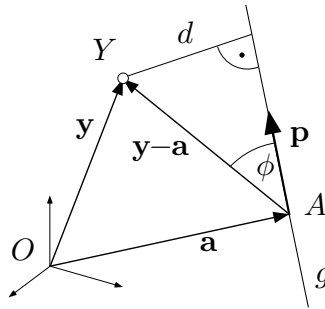


Fig. 1.6.24

⑧ Ein Körper drehe sich mit Winkelgeschwindigkeit $\omega > 0$ um die Achse a durch O . Es sei \mathbf{e} der durch die Korkzieherregel bestimmte Einheitsvektor auf a (Fig. 1.6.25). Der Vektor $\vec{\omega} := \omega \mathbf{e}$ heißt **Winkelgeschwindigkeitsvektor** dieser Drehbewegung.

Über die Geschwindigkeit \mathbf{v} ($= \mathbf{v}(\mathbf{x})$) eines Masseteilchens an der Stelle \mathbf{x} läßt sich folgendes sagen:

- (a) (vgl. Beispiel ⑦) $|\mathbf{v}| = \omega d = \omega |\mathbf{e} \times \mathbf{x}| = |\omega \mathbf{e} \times \mathbf{x}|$;
- (b) $\mathbf{v} \perp \Sigma$ und somit $\mathbf{v} \perp \omega \mathbf{e}$, $\mathbf{v} \perp \mathbf{x}$;
- (c) das Tripel $\omega \mathbf{e}$, \mathbf{x} , \mathbf{v} ist ein Rechtssystem.

Aus (a)–(c) ergibt sich die wichtige kinematische Formel

$$\mathbf{v} = \vec{\omega} \times \mathbf{x} . \tag{4}$$

○

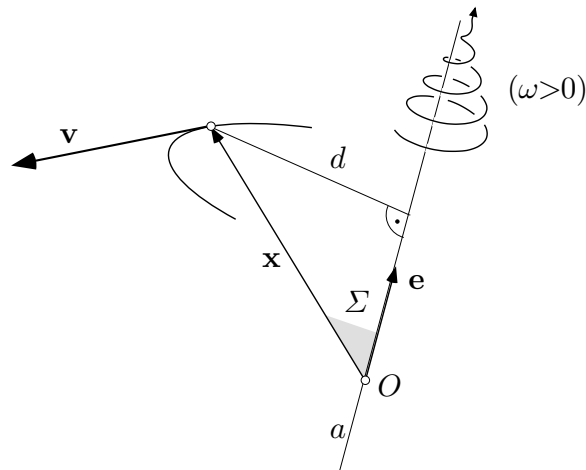


Fig. 1.6.25

Spatprodukt und andere mehrfache Vektorprodukte

Es gibt drittens ein Produkt von drei Vektoren \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} — das sogenannte **Spatprodukt** $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$. Sind die drei Vektoren linear unabhängig, so spannen sie ein Parallelepiped oder eben einen **Spat** vom Volumen $V > 0$ auf (Fig. 1.6.26). Wir definieren

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] := \begin{cases} 0 & (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ linear abhängig}), \\ V & (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ ein Rechtssystem}), \\ -V & (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ ein Linkssystem}). \end{cases}$$

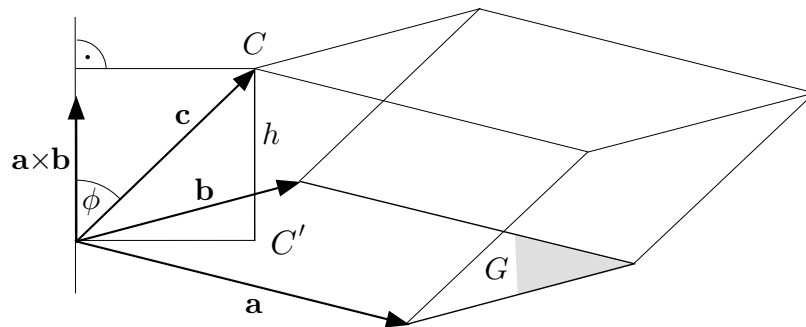


Fig. 1.6.26

Da V nicht von der Reihenfolge der drei Vektoren abhängt, gilt

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}],$$

aber

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}], \dots ;$$

denn bei der Vertauschung zweier Vektoren kehrt sich die Orientierung um. Vor allem hängt $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ mit den früher erklärten Produkten zusammen via

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) . \quad (5)$$

□ Der Figur 1.6.26 entnimmt man

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] &= \pm V = \pm G \cdot h = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| |\mathbf{c}| \cos \phi \\ &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} , \end{aligned}$$

wobei es auch mit dem Vorzeichen richtig hinkommt. □

Aus (5) folgt mit (1.2) und (1.3), daß das Spatprodukt eine trilineare Funktion von drei Vektorvariablen ist; das war ja aufgrund der Definition nicht ohne weiteres zu erwarten. In Koordinaten ist

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\ &= \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

⑨ Gegeben sind die beiden nicht parallelen Geraden

$$g: \mathbf{x}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{p}, \quad h: \mathbf{y}(t) = \mathbf{b} + t\mathbf{q}$$

die im allgemeinen windschief zueinander liegen (Fig. 1.6.27). Gesucht ist ihr kürzester Abstand d .

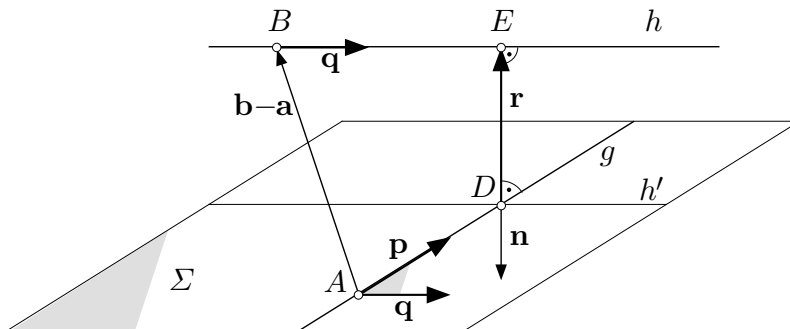


Fig. 1.6.27

Es seien Σ die von \mathbf{p} und \mathbf{q} aufgespannte Ebene durch A , dann h' die Orthogonalprojektion von h auf Σ und

$$\mathbf{n} := \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{q}}{|\mathbf{p} \times \mathbf{q}|}$$

der Normaleneinheitsvektor von Σ . Aufgrund von (2) gilt

$$\mathbf{r} := (\mathbf{b} - \mathbf{a})_{\mathbf{n}} = ((\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$$

und somit

$$d = |\mathbf{r}| = |(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n}| = \frac{|[\mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{q}]|}{|\mathbf{p} \times \mathbf{q}|}.$$

Die Punkte D und E sind damit allerdings noch nicht bestimmt. \circ

Außer (5) gibt es noch unzählige weitere Identitäten für mehrfache Vektorprodukte. Wir beweisen zum Schluß die folgende:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a}. \quad (6)$$

Wir wählen eine neue, ebenfalls orthonormierte und "rechtshändige" Basis $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ so, daß \mathbf{a} ein Vielfaches von \mathbf{e}'_1 ist und \mathbf{b} in der von \mathbf{e}'_1 und \mathbf{e}'_2 aufgespannten Ebene liegt. Die drei Vektoren \mathbf{a} , \mathbf{b} und \mathbf{c} haben dann folgende neuen Koordinaten:

$$\mathbf{a} = (a_1, 0, 0), \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2, 0), \quad \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3).$$

Orthonormiert heißt: Für alle i und k gilt $\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_k = \delta_{ik}$. Die Formeln für die diversen Produkte gelten dann auch bezüglich der neuen Koordinaten. Wir haben daher

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ & \times & \\ & b_1 & b_2 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, a_1 b_2)$$

und damit weiter

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 b_2 \\ & \times & \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = (-a_1 b_2 c_2, a_1 b_2 c_1, 0).$$

Andererseits ist aber auch

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} &= a_1 c_1 (b_1, b_2, 0) - (b_1 c_1 + b_2 c_2) (a_1, 0, 0) \\ &= (-a_1 b_2 c_2, a_1 b_2 c_1, 0). \end{aligned} \quad \lrcorner$$

Aus (6) folgt übrigens, daß das Vektorprodukt nicht assoziativ ist. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} - \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} \\ &= \underline{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b}} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{c} - \underline{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b}} \\ &= (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{b}, \end{aligned}$$

und dies ist nicht $\equiv \mathbf{0}$.

Aufgaben

- Gegeben sind die drei Punkte $A := (3, 1, -2)$, $B := (-1, 4, 0)$, $C := (-2, 1, -1)$. Bestimme einen Punkt D so, daß die vier Punkte A , B , C und D Eckpunkte eines Parallelogramms sind. Wieviele Lösungen gibt es?
- Zeige: Die Seitenmitten eines räumlichen (nicht notwendigerweise ebenen) Vierecks $ABCD$ liegen in einer Ebene und bilden ein Parallelogramm.
- Ⓜ Die Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} seien linear unabhängig. Zeichne die Kurve γ mit der Parameterdarstellung

$$\gamma: t \mapsto \mathbf{x}(t) := \cos t \mathbf{a} + \sin t \mathbf{b} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

sowie ihre Tangenten in ausgewählten Punkten. Um was für eine Kurve handelt es sich? (Kein Beweis verlangt.)

- In welcher gegenseitigen Lage befinden sich drei Einheitsvektoren mit Summe $\mathbf{0}$?
- Bestimme die Gleichung der Ebene, die durch den Punkt $P := (2, 4, -1)$ geht und senkrecht auf der Geraden

$$g: t \mapsto \mathbf{x}(t) := (2, 1, -3) + t(-4, 8, 8) \quad (-\infty < t < \infty)$$

steht. Welchen Abstand hat diese Ebene vom Ursprung?

- Von einem Dreieck ABC im Raum sind die Seitenmittelpunkte

$$M_a := (1, 0, 3), \quad M_b := (2, 7, 8), \quad M_c := (-2, 1, -4)$$

gegeben. Bestimme A , B und C .

- Man gebe drei Einheitsvektoren \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 , \mathbf{a}_3 an, die auf dem Vektor $\mathbf{c} := (2, 1, 1)$ senkrecht stehen und untereinander Winkel von 120° einschließen. (*Hinweis:* Man "produziere" solche Vektoren und vermeide das Auflösen von riesigen Gleichungssystemen.)
- Die drei Kanten einer dreikantigen Pyramide bilden untereinander Winkel von je 45° . Bestimme den Innenwinkel zwischen zwei Seitenflächen bzw. den Cosinus oder den Sinus dieses Winkels.
- Es seien \mathbf{a} und \mathbf{b} zwei feste Vektoren im dreidimensionalen Raum, $|\mathbf{b}| < 1$, und es sei die Vektorfolge $(\mathbf{a}_k)_{k \geq 0}$ rekursiv definiert durch

$$\mathbf{a}_0 := \mathbf{a}, \quad \mathbf{a}_{k+1} := \mathbf{b} \times \mathbf{a}_k \quad (k \geq 0).$$

Berechne $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{a}_k$. (*Hinweis:* Benutze die geometrische Definition des Vektorprodukts. Figur!)

1.7 Komplexe Zahlen

Der Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen läßt sich folgendermaßen charakterisieren:

- (a) \mathbb{C} ist ein Körper; die Elemente z von \mathbb{C} heißen **komplexe Zahlen**.
- (b) $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$ (als Körper).
- (c) In \mathbb{C} gibt es zwei Lösungen i und $-i$ der Gleichung $z^2 + 1 = 0$.
- (d) Jede komplexe Zahl z läßt sich auf genau eine Weise darstellen in der Form

$$z = x + iy, \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}.$$

Aus (a)–(c) folgt schon, daß es in \mathbb{C} Zahlen der Form $z = x + iy$ gibt, wobei der **Realteil** $x =: \operatorname{Re} z$ und der **Imaginärteil** $y =: \operatorname{Im} z$ durch z eindeutig bestimmt sind. Punkt (d) besagt, daß das schon alle komplexen Zahlen sind. Aus (d) folgt, daß \mathbb{C} in bijektiver (das heißt: eineindeutiger) Weise auf die (x, y) -Ebene \mathbb{R}^2 bezogen ist vermöge

$$x + iy \leftrightarrow (x, y).$$

Dabei entspricht die reelle komplexe Zahl 1 dem Punkt $(1, 0)$ und die Zahl i dem Punkt $(0, 1)$. Es liegt also nahe, die komplexen Zahlen gemäß Figur 1.7.1 in der Ebene zur Darstellung zu bringen. Man spricht in diesem Zusammenhang von der **komplexen** oder der **Gaußschen Zahlenebene**. Die x -Achse ist die **reelle Achse** (vgl. Eigenschaft (b)!), die y -Achse die **imaginäre Achse**.

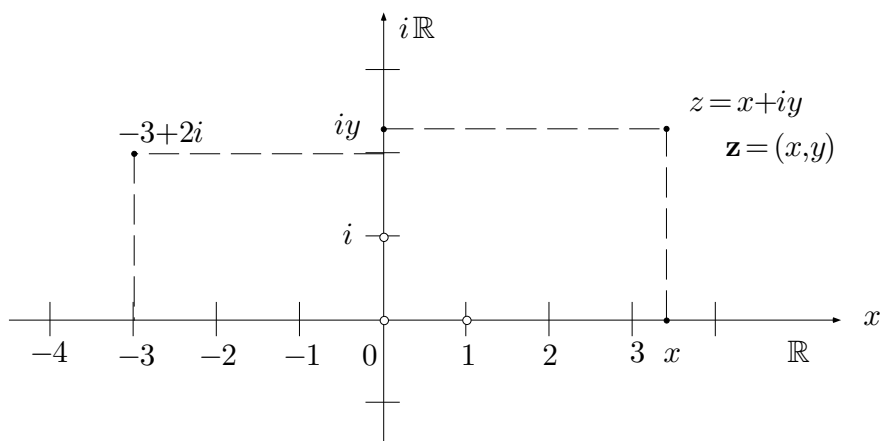


Fig. 1.7.1

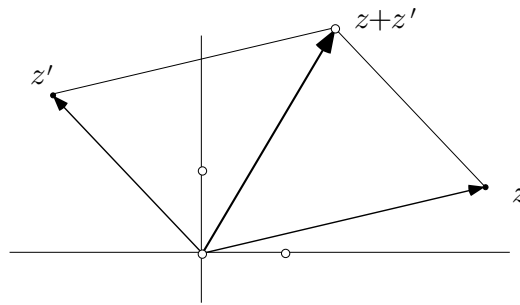


Fig. 1.7.2

Rechenregeln

In \mathbb{C} gelten die folgenden Rechenregeln:

Für zwei beliebige Zahlen $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$ hat man

$$z + z' = x + x' + i(y + y'),$$

was geometrisch auf die vektorielle Addition der betreffenden Punkte in der Zahlenebene hinausläuft (Fig. 1.7.2). Weiter ist

$$\begin{aligned} z \cdot z' &= (x + iy) \cdot (x' + iy') \\ &= xx' + xiy' + iyx' + iyiy' \end{aligned}$$

und somit wegen $i^2 = -1$:

$$z \cdot z' = xx' - yy' + i(xy' + yx').$$

Ist hier speziell $z := a \in \mathbb{R}$ eine reelle komplexe Zahl, so gilt

$$az' = ax' + iay',$$

das heißt: Der Multiplikation einer Zahl $z' \in \mathbb{C}$ mit einem $a \in \mathbb{R}$ entspricht geometrisch die Streckung des Vektors z' mit dem Skalarfaktor a .

Ist schließlich $z \neq 0$, das heißt: $(x, y) \neq \mathbf{0}$, so besitzt z den Kehrwert

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy) \cdot (x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Man beachte, daß wir zur Herleitung dieser Formeln einfach die in jedem Körper gültigen Rechenregeln benutzt haben.

① Die komplexe Zahl $z := \left(\frac{8-i}{5+i}\right)^4$ soll in Real- und Imaginärteil zerlegt werden. — Zunächst ist

$$\frac{8-i}{5+i} = \frac{(8-i)(5-i)}{(5+i)(5-i)} = \frac{40 - 1 + i(-5-8)}{25+1} = \frac{1}{2}(3-i).$$

Im weiteren dürfen wir die binomische Formel natürlich auch im Komplexen anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{16}(3-i)^4 = \frac{1}{16}(3^4 - 4 \cdot 3^3 i + 6 \cdot 3^2 i^2 - 4 \cdot 3 i^3 + i^4) \\ &= \frac{1}{16}(81 - 54 + 1 + i(-108 + 12)) = \frac{1}{4}(7 - 24i). \end{aligned}$$

○

Die Gleichung $z^2 + 1 = 0$, die die Zahl i “definiert”, besitzt die beiden Lösungen i und $-i$. Das hat letzten Endes zur Folge, daß die Körperstruktur von \mathbb{C} bezüglich der “Spiegelung” $i \mapsto -i$ symmetrisch ist. Ist $z = x + iy$, so heißt

$$\bar{z} := x - iy$$

die zu z **konjugiert komplexe** Zahl. Die Punkte z und \bar{z} liegen spiegelbildlich zur reellen Achse (Fig. 1.7.3).

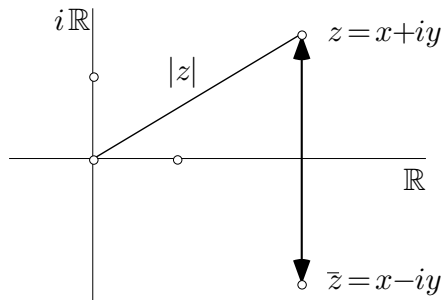


Fig. 1.7.3

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i};$$

$$z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}; \quad \overline{\bar{z}} = z;$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \overline{1/z} = 1/\bar{z}.$$

② Es sei

$$q(t) := a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_0, \quad a_k \in \mathbb{R} \quad (0 \leq k \leq n)$$

ein Polynom mit *reellen* Koeffizienten. Wir behaupten: Ist die komplexe Zahl z_0 eine m -fache Nullstelle von q , so ist auch \bar{z}_0 eine m -fache Nullstelle von q .

┌ Für ein beliebiges komplexes Polynom

$$p(t) := c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \dots + c_0, \quad c_k \in \mathbb{C} \quad (0 \leq k \leq n),$$

in der Unbestimmten t definieren wir das Polynom \bar{p} durch Konjugation der Koeffizienten von p :

$$\bar{p}(t) := \bar{c}_n t^n + \bar{c}_{n-1} t^{n-1} + \dots + \bar{c}_0.$$

Nach Voraussetzung über q ist $\bar{q} = q$; ferner gibt es ein komplexes Polynom r mit

$$(t - z_0)^m r(t) = q(t).$$

Es folgt

$$(t - \bar{z}_0)^m \bar{r}(t) = \bar{q}(t) = q(t);$$

denn beim Ausmultiplizieren der Polynome linker Hand werden alle Koeffizienten gegenüber den entsprechenden Koeffizienten in der vorangehenden Gleichung konjugiert. Wie man sieht, enthält q auch den Faktor $(t - \bar{z}_0)^m$.

┐
○

Weiter ist

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 \geq 0.$$

Aufgrund der geometrischen Interpretation (Fig. 1.7.3) liegt es nahe, die Größe

$$|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

als (**absoluten**) **Betrag** von z zu bezeichnen. Für den Betrag gelten folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned} |z \cdot z'| &= |z| \cdot |z'|, \\ z \in \mathbb{R} &\implies |z|_{\mathbb{C}} = |z|_{\mathbb{R}}, \\ |\operatorname{Re} z| &\leq |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|, \\ |z + z'| &\leq |z| + |z'|. \end{aligned}$$

┌ Die erste Regel folgt aus

$$|z z'|^2 = z z' \cdot \overline{z z'} = z \bar{z} z' \bar{z}' = |z|^2 |z'|^2$$

durch Ziehen der Quadratwurzel. Der Rest ist klar.

┐

Polarform, Eulersche Formel

In der Ebene \mathbb{R}^2 stehen uns neben den kartesischen Koordinaten x, y noch die Polarkoordinaten r, ϕ zur Verfügung. In der komplexen Zahlenebene kommen die Polarkoordinaten folgendermaßen zum Zug:

Zunächst definieren wir für beliebiges $z = x + iy \neq 0$:

$$\arg z := \arg(x, y) .$$

Dann sind die Polarkoordinaten r, ϕ der komplexen Zahl z gegeben durch

$$\begin{cases} r = |z| \\ \phi = \arg z \end{cases}$$

(das ist nichts Neues); umgekehrt erhält man z aus r und ϕ vermöge

$$z = r (\cos \phi + i \sin \phi) .$$

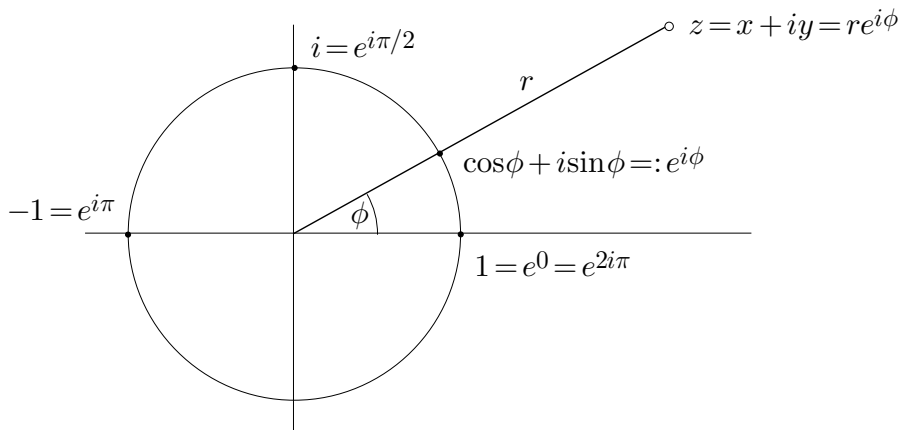


Fig. 1.7.4

Da das Binom $\cos \phi + i \sin \phi$ noch eine große Rolle spielen wird, ist es angebracht, dafür eine Abkürzung einzuführen:

$$\cos \phi + i \sin \phi =: e^{i\phi} \quad \text{(Eulersche Formel)} .$$

Die **Polarform** einer komplexen Zahl z (Fig. 1.7.4) erhält damit die folgende Gestalt:

$$z = r e^{i\phi} .$$

Die gewählte Symbolik wird im folgenden hinreichend gerechtfertigt. Wir notieren noch die speziellen Werte

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{i\pi} = -1$$

sowie das Prinzip

$$e^{i\phi} = 1 \iff \phi = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Vor allem genügt $e^{i\cdot}$ der Funktionalgleichung

$$e^{i\phi} \cdot e^{i\psi} = e^{i(\phi+\psi)} \quad (\phi, \psi \in \mathbb{R}). \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \lceil \quad e^{i\phi} \cdot e^{i\psi} &= (\cos \phi + i \sin \phi)(\cos \psi + i \sin \psi) \\ &= \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi + i(\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi) \\ &= \cos(\phi + \psi) + i \sin(\phi + \psi) \\ &= e^{i(\phi+\psi)}. \quad \rfloor \end{aligned}$$

Hieraus folgt

(1.4) Für beliebige $z, z' \in \mathbb{C}_{\neq 0}$ gilt

- (a) $|z z'| = |z| |z'|,$
 (b) $\arg(z z') = \arg z + \arg z'.$

In Worten: Bei der Multiplikation von komplexen Zahlen multiplizieren sich die absoluten Beträge und addieren sich die Argumente, wobei natürlich die Argumente “modulo 2π ” zu verstehen sind.

\lceil (a) ist schon bewiesen. — (b): Aus

$$z z' = r e^{i\phi} \cdot r' e^{i\phi'} = r r' e^{i(\phi+\phi')}$$

folgt wegen $r r' > 0$:

$$\arg(z z') = \arg(r r' e^{i(\phi+\phi')}) = \arg(e^{i(\phi+\phi')}) = \phi + \phi' = \arg z + \arg z'. \quad \rfloor$$

Aus (1) folgt weiter

$$\forall n \in \mathbb{Z}: \quad (e^{i\phi})^n = e^{in\phi}$$

und somit für eine beliebige Zahl $z = r e^{i\phi}$:

$$z^n = r^n e^{in\phi}, \quad (2)$$

das heißt: Die n -te Potenz von z hat den Betrag r^n und das Argument $n\phi$ (Fig. 1.7.5).

③ Es sollen die Polarform sowie Real- und Imaginärteil der Zahl

$$z := \frac{(1-i)^6}{(\sqrt{3}+i)^5}$$

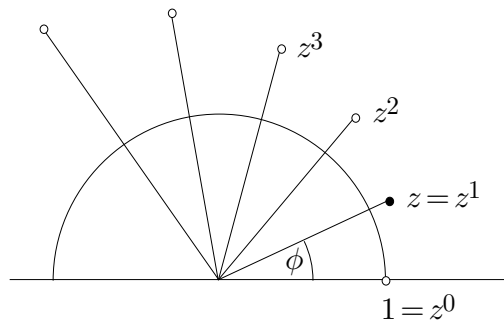


Fig. 1.7.5

bestimmt werden. — Mit $z_1 := 1 - i$, $z_2 := \sqrt{3} + i$ (Fig. 1.7.6) ergibt sich

$$|z_1| = \sqrt{2}, \quad \arg z_1 = -\frac{\pi}{4}; \quad |z_2| = 2, \quad \arg z_2 = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

und folglich nach (2):

$$|z| = |z_1|^6 / |z_2|^5 = (\sqrt{2})^6 / 2^5 = \frac{1}{4},$$

$$\arg z = 6 \arg z_1 - 5 \arg z_2 = 6 \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) - 5 \cdot \frac{\pi}{6} = -\frac{14\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}.$$

Hiernach ist

$$z = \frac{1}{4} e^{-i\pi/3} = \frac{1}{4} \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{8} - i \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

○

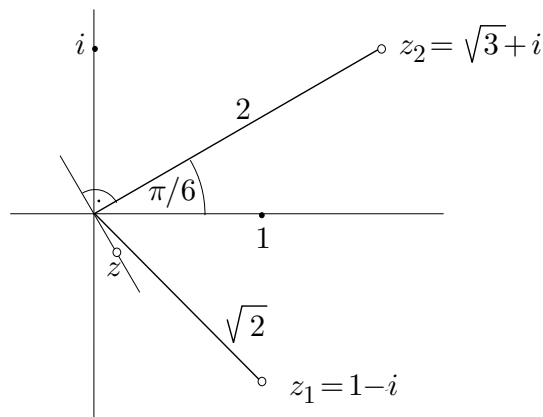


Fig. 1.7.6

Wurzelziehen im Komplexen

Wie steht es mit dem Ziehen von n -ten Wurzeln? Den Fall $n := 2$ (**Quadratwurzel**) wollen wir übungshalber zunächst algebraisch behandeln.

Gesucht sind also die Lösungen $z = x + iy$ der Gleichung

$$z^2 = c;$$

dabei ist $c = a + ib$ eine gegebene komplexe Zahl. Wegen

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

erhalten wir durch Trennung von Real- und Imaginärteil die beiden reellen Gleichungen

$$x^2 - y^2 = a, \quad 2xy = b. \quad (3)$$

Ist $b = 0$, d.h. c eine reelle Zahl, so folgt $x = 0$ oder $y = 0$. Ist dabei $a > 0$, so ist notwendigerweise $x^2 = a$ und $y = 0$, und wir erhalten $z = \pm\sqrt{a}$, wie erwartet. Ist aber $b = 0$ und $a < 0$, so muß $x = 0$ und $y^2 = -a = |a|$ sein, und es folgt $z = \pm i\sqrt{|a|}$.

Bsp: $z^2 = -32 \implies z = \pm 4i\sqrt{2}$.

Es sei jetzt $b \neq 0$. Wegen

$$x^2 + y^2 = |z|^2 = |z^2| = |c| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ergeben sich im Verein mit der ersten Gleichung (3) die Formeln

$$x^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} + a), \quad y^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - a) \quad (4)$$

(beide Klammern sind > 0 , unabhängig vom Vorzeichen von a). Ist $a \geq 0$, so berechnen wir x aus der ersten Gleichung (4) und anschliessend y aus der zweiten Gleichung (3):

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} + a)}, \quad y = \frac{b}{2x}.$$

Im Fall $a < 0$ berechnen wir erst das y aus (4) und dann das x aus (3):

$$y = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - a)}, \quad x = \frac{b}{2y}.$$

In jedem Fall erhält man die beiden komplexen Lösungen

$$z_{\pm} = \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} + a)} + i \operatorname{sgn} b \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - a)} \right)$$

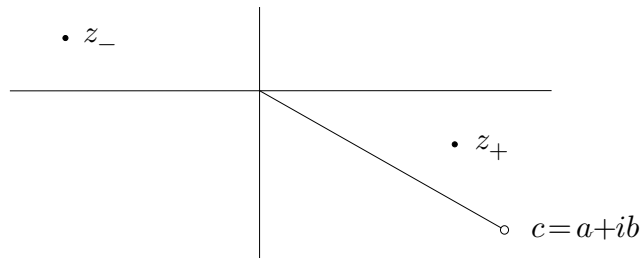


Fig. 1.7.7

der ursprünglichen Gleichung $z^2 = c$. Die beiden Punkte z_+ und z_- liegen spiegelbildlich zum Ursprung (Fig. 1.7.7).

Anmerkung: Wir haben an sich nur das folgende bewiesen:

$$z^2 = c \implies z = z_+ \vee z = z_- .$$

Strenggenommen müßte man noch verifizieren, daß tatsächlich $z_+^2 = z_-^2 = c$ ist; siehe Beispiel 1.2.①.

Die allgemeine quadratische Gleichung

$$z^2 + pz + q = 0, \quad p, q \in \mathbb{C},$$

läßt sich durch quadratische Ergänzung auf den eben behandelten Fall zurückführen: Die gegebene Gleichung ist äquivalent mit

$$\left(z + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q =: D .$$

Wir müssen also die beiden Quadratwurzeln " $\pm\sqrt{D}$ " bestimmen und haben dann wie im Reellen die beiden Lösungen

$$z = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} .$$

④ Gegeben ist die quadratische Gleichung

$$z^2 - 2(1+i)z + 3 - 2i = 0 .$$

Man hat nacheinander

$$p = -2(1+i), \quad q = 3 - 2i, \quad D = \frac{p^2}{4} - q = -3 + 4i$$

und somit nach den oben hergeleiteten Formeln (mit $a := -3$, $b := 4$):

$$\pm\sqrt{D} = \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{25} - 3)} + i \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{25} + 3)} \right) = \pm(1 + 2i) .$$

Dies liefert

$$z_{\pm} = 1 + i \pm (1 + 2i),$$

das heißt: $z_+ = 2 + 3i$, $z_- = -i$.

○

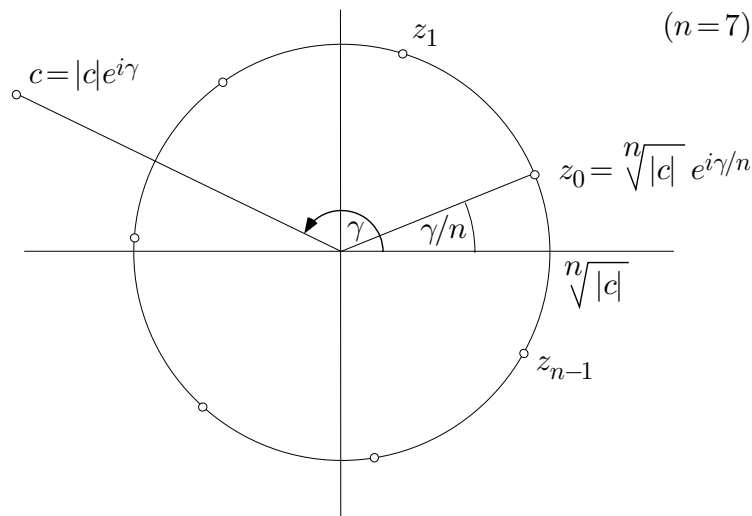


Fig. 1.7.8

Die n -ten Wurzeln, $n \geq 1$ beliebig, einer komplexen Zahl $c \neq 0$ finden wir am besten, indem wir “alles” in Polarform darstellen. Wir schreiben also $c = |c|e^{i\gamma}$ und machen für die gesuchten Wurzeln z den Ansatz $z = re^{i\phi}$. Die definierende Gleichung $z^n = c$ geht dann wegen (2) über in

$$r^n e^{in\phi} = |c|e^{i\gamma}.$$

Hieraus folgt erwartungsgemäß

$$r = \sqrt[n]{|c|};$$

vor allem aber müssen die Argumente ϕ der gesuchten Wurzeln der Bedingung

$$e^{in\phi} = e^{i\gamma} \quad \text{bzw.} \quad e^{i(n\phi-\gamma)} = 1$$

genügen. Diese Bedingung ist nicht etwa äquivalent mit $n\phi = \gamma$, sondern mit dem folgenden:

$$\exists k \in \mathbb{Z} : \quad n\phi - \gamma = 2k\pi,$$

woraus man für jedes $k \in \mathbb{Z}$ einen zulässigen ϕ -Wert

$$\phi_k := \frac{\gamma}{n} + k \frac{2\pi}{n}$$

berechnet. Zwei k -Werte, die sich um ein Vielfaches von n unterscheiden, liefern ϕ -Werte, die sich um ein Vielfaches von 2π unterscheiden, also dieselbe Zahl $z = re^{i\phi}$. Somit bleiben genau n “modulo 2π ” verschiedene ϕ -Werte,

nämlich die Werte ϕ_k ($0 \leq k \leq n-1$). Die zugehörigen n -ten Wurzeln von c sind die Zahlen $z_k := r e^{i\phi_k}$, ausgeschrieben

$$z_k = \sqrt[n]{|c|} e^{i(\frac{\gamma}{n} + k\frac{2\pi}{n})} \quad (0 \leq k \leq n-1).$$

Wegen

$$\arg z_{k+1} - \arg z_k = \phi_{k+1} - \phi_k = \frac{2\pi}{n} \quad \forall k$$

bilden diese n Wurzeln ein reguläres n -Eck auf dem Kreis vom Radius $\sqrt[n]{|c|}$ (Fig. 1.7.8).

Ist speziell $c = 1$, so erhält man die sogenannten n -ten **Einheitswurzeln**. Wegen $|c| = 1$, $\gamma = 0$ bilden sie ein reguläres n -Eck auf dem Einheitskreis mit einer Ecke im Punkt 1. Nach der allgemeinen Formel sind sie gegeben durch

$$z_k = e^{ik\frac{2\pi}{n}}.$$

Setzt man zur Abkürzung $z_1 = e^{2\pi i/n} =: \omega$ (Fig. 1.7.9), so kann man alle übrigen mit Hilfe dieses ω darstellen:

$$z_k = \omega^k \quad (0 \leq k \leq n-1).$$

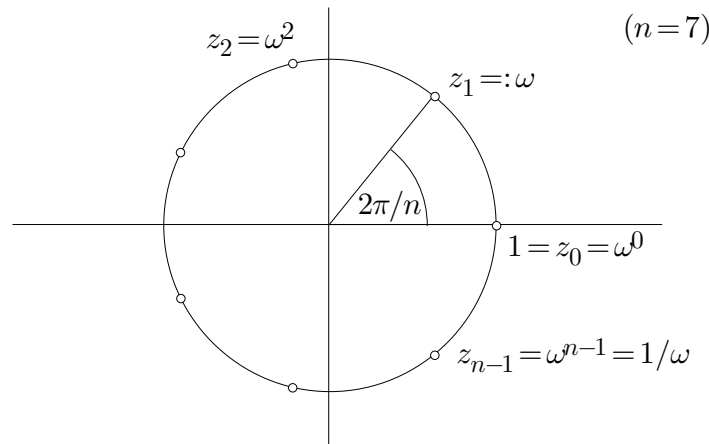


Fig. 1.7.9

Ausgangspunkt zur Einführung der komplexen Zahlen war das Bestreben, "aus negativen Zahlen die Wurzel zu ziehen". Wie wir gesehen haben, ist damit von selbst jede quadratische Gleichung, und nicht nur die spezielle Gleichung $z^2 + 1 = 0$, in befriedigender Weise lösbar geworden. In Wirklichkeit gilt ein viel allgemeinerer Satz, der **Fundamentalsatz der Algebra** (ohne Beweis):

(1.5) Jedes Polynom

$$p(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \dots + c_1z + c_0$$

vom Grad $n \geq 1$ mit komplexen Koeffizienten c_k ($0 \leq k \leq n-1$) besitzt wenigstens eine Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$.

Aus **(1.5)** folgt weiter, daß sich jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ in n Linearfaktoren zerlegen läßt und somit genau n komplexe Nullstellen (mehrfache mehrfach gezählt) besitzt. Für $1 \leq n \leq 4$ gibt es klassische Lösungsformeln, wobei man aber für alle $n > 2$ mit numerischen Methoden besser fährt. Ein respektabler Teil der numerischen Mathematik handelt nämlich gerade von dem Problem, die Nullstellen eines gegebenen Polynoms in effizienter Weise numerisch zu bestimmen.

Aufgaben

1. (M) Zerlege die Zahl $\left(\frac{24-7i}{20+15i}\right)^{17}$ in Real- und Imaginärteil. (*Hinweis:* Lieber ohne die binomische Formel.)
2. (Fig. 1.7.10) Konstruiere mit Zirkel und Lineal die Punkte $1/\bar{z}$, $1/z$, z^2 .

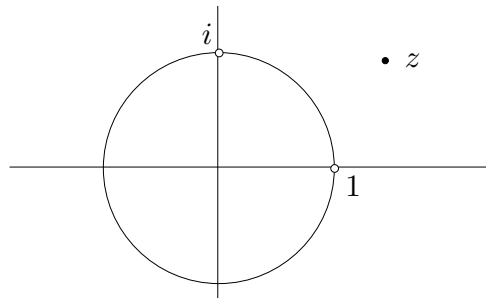


Fig. 1.7.10

3. (M) Stelle die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + ib$ dar:
 - (a) $\frac{1}{i + \frac{1}{i + 1}}$,
 - (b) $e^{i \arcsin x}$,
 - (c) $e^{2i \arctan t}$.

4. (M) Bestimme sämtliche Lösungen der Gleichung

$$z^4 - 8(-1 + \sqrt{3}i) = 0.$$

5. (M) Stelle $\cos(5\phi)$, $\sin(5\phi)$ als Polynome in $\cos \phi$, $\sin \phi$ dar. (*Hinweis:* Binomische Formel)
6. Es sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Man bestimme das Produkt aller n -ten Wurzeln der Zahl -1 .
7. Es sei $z := 1 + i\sqrt{3}$. Bestimme die Daten a, q der logarithmischen Spiralen

$$\gamma: \quad r(\phi) := a e^{q\phi} \quad (-\infty < \phi < \infty),$$

die durch die sämtlichen Punkte z^k ($k \in \mathbb{Z}$) gehen.

8. (M) Die Gleichung

$$z^4 - 2z^3 + z^2 + 2z - 2 = 0$$

besitzt die Lösung $z_1 = 1 + i$. Bestimme sämtliche Lösungen dieser Gleichung.

9. Durch $z \mapsto w := 1/z$ wird die **punktierte Ebene** ($:= \mathbb{C} \setminus \{0\}$) in die w -Ebene abgebildet. Man zeichne die Bilder
- (a) der reellen Achse, (b) der imaginären Achse,
(c) eines Kreises $|z| = r$, (d) der Geraden $\operatorname{Re} z = 1$.