

2

Funktionen

2.1 Erscheinungsformen

Begriff der Funktion

Zu Eulers Zeiten verstand man unter einer “Funktion $f(x)$ ” das, was wir heute als **Funktionsterm** bezeichnen: einen mehr oder weniger komplizierten Ausdruck in der unabhängigen Variablen x ,

Bsp:
$$\frac{\log(x + \sqrt{1 + x^2})}{2 + \cos x},$$

der für jede Zahl x eines geeigneten Bereichs der Zahlengeraden einen wohlbestimmten Funktionswert $f(x)$ festlegt.

Seither ist diese Vorstellung umfassend verallgemeinert und auch präzisiert worden. Insbesondere sind wir heute gewohnt, die eigentliche Funktion, das “Rechengesetz”, mit f (gelegentlich mit $f(\cdot)$, s.u.) zu bezeichnen und nur dann $f(x)$ zu schreiben, wenn tatsächlich der Funktionswert an der Stelle x gemeint ist. Diese Linie läßt sich allerdings nicht immer durchziehen; so sprechen wir etwa von der “Funktion e^t ” und meinen damit die Funktion $\exp: t \mapsto e^t$.

Also: Sind A und B beliebige Mengen, so versteht man unter einer **Funktion** oder **Abbildung** von A nach B eine Vorschrift f , die für jeden Punkt $x \in A$ einen bestimmten Punkt $y \in B$ als **Funktionswert** oder **Bildpunkt** festlegt. Wir schreiben dafür

$$f: A \rightarrow B, \quad x \mapsto y := f(x).$$

Die Menge $A =: \text{dom}(f)$ heißt der **Definitionsbereich** (englisch: *domain*) von f , die Menge B der **Zielbereich** (englisch: *range*) von f . Die Menge

$$\text{im}(f) := \{y \in B \mid \exists x \in A : y = f(x)\}$$

der tatsächlich angenommenen Werte ist im allgemeinen eine echte Teilmenge von B und heißt **Bildmenge** oder **Wertebereich** von f .

Bsp: Die Sinusfunktion läßt sich zum Beispiel als Funktion $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oder als Funktion $\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ auffassen. In beiden Fällen ist $\text{im}(\sin) = [-1, 1]$.

Hat eine Funktion einen Namen, der nicht gerade *functionlike* ist, etwa ‘ p ’, so können wir mit der Schreibweise $p(\cdot)$ anstelle von p deutlich machen, daß hier von einer Funktion die Rede ist. In ähnlicher Weise schreiben wir $x(\cdot)$, wenn die vorher freie Variable x in neuem Zusammenhang als Funktion einer anderen Variablen, etwa der “Zeit” t aufgefaßt werden soll. — Die Schreibweise

$$f: \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$$

drückt aus, daß f auf einer nicht näher spezifizierten, aber “vernünftigen” Teilmenge von \mathbb{R} , etwa auf einem Intervall, definiert ist. In diesem Sinne lebt eine Funktion $f: \mathbb{R}^3 \curvearrowright \mathbb{R}$ typischerweise auf einer offenen (s.u.) Teilmenge des dreidimensionalen Raums.

Zu jeder Funktion $f: A \rightarrow B$ gehört ihr **Graph** $\mathcal{G}(f)$, eine wohlbestimmte Teilmenge von $A \times B$. Im Fall einer Funktion $f: \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$ ist das die vertraute “Kurve $y = f(x)$ ”; allgemein ist $\mathcal{G}(f)$ definiert durch

$$\mathcal{G}(f) := \{(x, y) \in A \times B \mid x \in A, y = f(x)\}.$$

Die Figur 2.1.1 zeigt den Graphen einer Funktion $\text{ums}: [1..12] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.

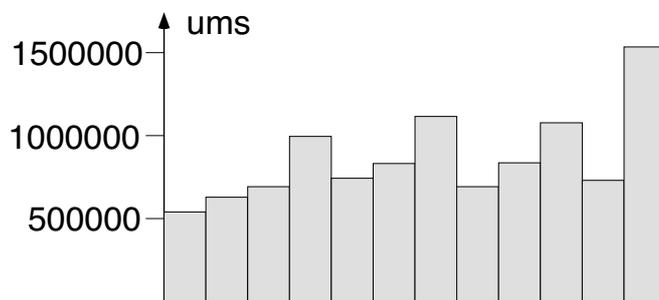


Fig. 2.1.1

Erscheinungsformen

Die Festlegung oder die Präsentation einer Funktion kann in ganz verschiedener Weise erfolgen. Wir weisen hier auf die folgenden Möglichkeiten hin:

► Wertetabelle

Ist $\text{dom}(f)$ eine beliebige endliche Menge, so läßt sich die gesamte in f enthaltene Information in einer zwispaltigen oder zweizeiligen Matrix, eben der **Wertetabelle** von f , abspeichern.

Bsp:

x	$f(x)$
Aadorf	8355
Aarau	5000
Aarberg	3270
⋮	
Lustmühle	9062
⋮	
Zwischenbergen	3901
Zwischenföh	3756

Ist $\text{dom}(f)$ eine unendliche Menge, zum Beispiel das Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$, so ist f durch eine Wertetabelle der Form

x	$a = x_0$	x_1	x_2	\cdots	x_{N-1}	$x_N = b$
$f(x)$	y_0	y_1	y_2		y_{N-1}	y_N

natürlich überhaupt noch nicht bestimmt.

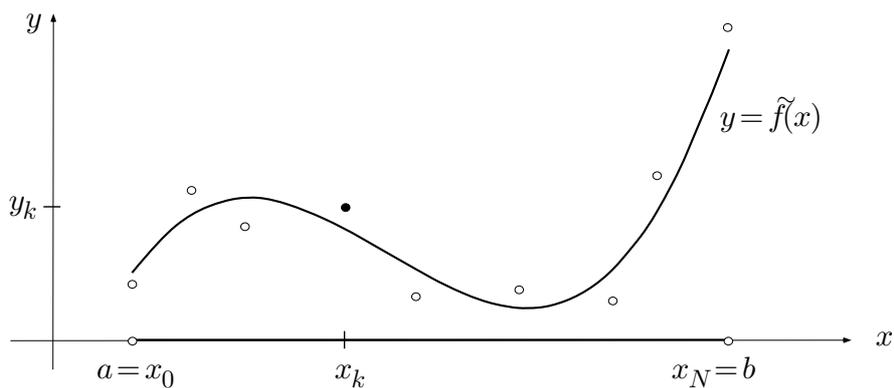


Fig. 2.1.2

Die numerische Mathematik stellt Methoden zur Verfügung, die

- ein “einfaches” $\tilde{f}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ finden, das ungefähr die gegebenen Werte realisiert (Fig. 2.1.2). Das ist dann sinnvoll, wenn die gegebenen Daten (x_k, y_k) ohnehin mit Meßfehlern behaftet sind.
- oder aber die gegebenen Werte als genau ansehen und in die Teilintervalle einfache Verbindungskurven (zum Beispiel Geradenstücke oder Parabelbögen) einpassen.

Bsp: Lineare Interpolation in der Logarithmentafel (Fig. 2.1.3): Aus den Tabellenwerten

x	$\log x$	
⋮		
276	5.62040	
277	5.62402	}
278	5.62762	
⋮		

$$\Delta = 360 \cdot 10^{-5}$$

ergibt sich für $\log 277.4$ ($= 5.625460508 \dots$) der Näherungswert

$$\log 277.4 \doteq 5.62402 + 0.4 \Delta = 5.62546 .$$

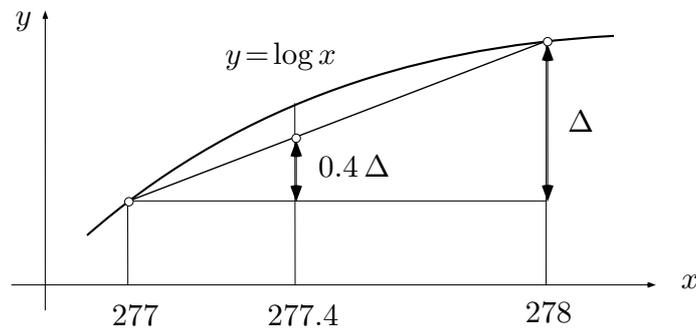


Fig. 2.1.3

► **Kurve $y = f(x)$**

Meßwertschreiber geben eine bestimmte Funktion der Zeit, zum Beispiel die Temperatur auf dem Jungfrauoch, in der Form einer Kurve aus. Einen zugehörigen Funktionsterm gibt es nicht. Wie läßt sich aus einem derartigen Meßstreifen die mittlere Temperatur in einem bestimmten Zeitintervall ermitteln? Das arithmetische Mittel der Temperaturen zu den Zeiten 06.00, 12.00, 18.00 und 24.00 ist offenbar nicht das Richtige. Der Integralbegriff wird uns bei dieser Frage weiterhelfen.

In der Analysis benutzen wir derartige Kurvenbilder einerseits, um *bestimmte* interessante Funktionen, etwa \exp oder \sin , zu visualisieren und andererseits, um charakteristische Eigenschaften von *beliebigen* Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, etwa Konvexität oder asymptotisches Verhalten (Fig. 2.1.4), einprägsam darzustellen.

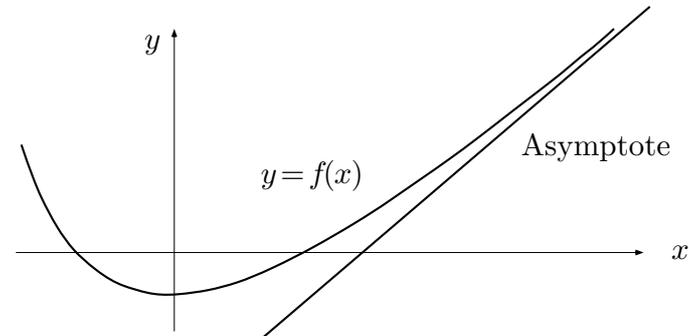


Fig. 2.1.4

► Funktionsterm, explizite Darstellung

Ein Funktionsausdruck,

$$\text{Bsp:} \quad \frac{x^2 + 5x + 4}{x^4 - 16}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k},$$

ist letzten Endes eine Rechenanweisung, mit deren Hilfe der Funktionswert $f(x)$ nach Vorgabe eines x in endlich vielen Schritten exakt oder mit jeder wünschbaren Genauigkeit ausgerechnet werden kann. Als Definitionsbereich gilt, wenn nichts anderes gesagt ist, die Menge aller Punkte x einer vereinbarten Grundmenge (zum Beispiel aller $x \in \mathbb{R}$), für die sich der Ausdruck ohne Rückfragen auswerten läßt. So ist etwa

$$f(x) := \frac{\sin x}{x}$$

a priori für alle $x \neq 0$ definiert. Im nachhinein erweist es sich als sinnvoll, zusätzlich $f(0) := 1$ zu setzen.

Wie oben schon gesagt, sprechen wir gelegentlich von der "Funktion e^t " oder der "Funktion t^n " u.ä., wenn wir im Grunde genommen die Funktionen $t \mapsto e^t$ bzw. $t \mapsto t^n$ meinen. So gerade im folgenden Absatz.

Funktionen, die sich mit Hilfe der vier Grundrechenarten und Zusammensetzen aus Konstanten, t^α ($\alpha \in \mathbb{R}$), $\log t$, e^t , $\cos t$, $\sin t$ sowie den Arcusfunktionen erhalten lassen, heißen **elementare Funktionen**.

$$\text{Bsp:} \quad f(t) := \frac{e^{\sqrt{1-\log^2 t}} \cos(\sin t)}{\pi + t^{1/5}}$$

Die Ableitung einer elementaren Funktion ist wieder eine elementare Funktion (dies folgt mit vollständiger Induktion aus den Ableitungsregeln); es gibt aber elementare Funktionen, deren Stammfunktionen nicht elementar sind, zum Beispiel die Funktion $e^{-t^2/2}$, die in der Wahrscheinlichkeitstheorie eine große Rolle spielt. Der Umfang einer Ellipse ist keine elementare Funktion der Halbachsen (sonst hätten Sie die Formel schon gesehen ...).

Als explizite (“ausdrückliche”) Darstellungen von Funktionen sind auch die folgenden Beispiele anzusehen:

$$\text{abs } x := |x| := \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x \leq 0) \end{cases} ;$$

$$\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\} \quad (= \text{größte ganze Zahl } \leq x) ,$$

$$\lceil x \rceil := \min\{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq x\} \quad (= \text{kleinste ganze Zahl } \geq x) .$$

Ist eine Funktion in expliziter Darstellung gegeben, so entsteht das Problem, ihre qualitativen Eigenschaften (Monotoniecharakter, Extrema, Singularitäten, asymptotisches Verhalten usw.) herauszulesen und in einer geeigneten Figur prägnant darzustellen. Die Behandlung dieses Problems ist im Fall einer Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die beliebte “Graphendiskussion”.

► Implizite Funktionen

Gelegentlich sind zwei (an sich “gleichberechtigte”) reelle Größen x, y verknüpft durch eine Gleichung

$$F(x, y) = 0 . \tag{1}$$

Bsp:
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 , \\ x^3 + y^3 &= 3axy , \quad a > 0 \text{ fest.} \end{aligned}$$

In diesem Fall sind x und y nicht mehr unabhängig voneinander beliebig wählbar. Die “zulässigen” Paare (x, y) bilden vielmehr eine Teilmenge $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, in aller Regel eine Kurve.

Die zwischen x und y bestehende Abhängigkeit läßt sich aber nur selten als globale Funktion

$$x \mapsto y := f(x)$$

auffassen, da zu einem gegebenen x -Wert ohne weiteres mehrere verschiedene y -Werte gehören können (siehe z.B. die Stelle x_1 in Fig. 2.1.5). Trotzdem sagt man, eine Gleichung der Form (1) definiere y **implizit** als Funktion von x (oder x als Funktion von y), und zwar auch dann, wenn es nicht gelingt, die Variable y formelmäßig durch x (oder x durch y) auszudrücken.

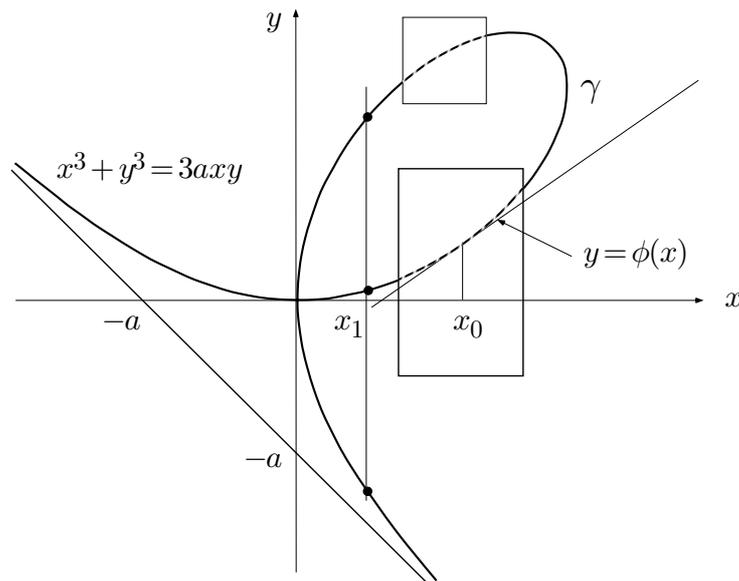


Fig. 2.1.5

Durch die Gleichung (1) werden nämlich immerhin *lokal* richtiggehende Funktionen

$$\phi: x \mapsto y := \phi(x)$$

festgelegt. Diese lokalen Funktionen sind nur innerhalb eines “Fensters” erklärt (Fig. 2.1.5). Man kann sie diskutieren und zum Beispiel die Ableitung $\phi'(x_0)$ oder Extremalwerte ausrechnen, ohne die definierende Gleichung (1) tatsächlich für variables x nach y aufzulösen.

► Differentialgleichung

Bei den vorangehenden Paradigmen waren die betrachteten Funktionen immer schon mehr oder weniger vorhanden. Es kann aber durchaus sein, daß das Hauptproblem darin besteht, die interessierende(n) Funktion(en) überhaupt erst zu bestimmen. Das ist zum Beispiel dann der Fall, wenn die betreffenden Funktionen nur durch “innere Eigenschaften” charakterisiert sind.

Eine “innere Eigenschaft” einer Funktion ist insbesondere das Bestehen einer **Funktionalgleichung**, das heißt: einer Identität, die die Funktionswerte an verschiedenen, aber durch Grundoperationen miteinander verbundenen Stellen x, x', \dots miteinander verknüpft.

$$\begin{aligned} \text{Bsp:} \quad & \cos(2x) \equiv 2 \cos^2 x - 1, \\ & e^{x+y} \equiv e^x \cdot e^y, \\ & \arg(z_1 \cdot z_2) \equiv \arg z_1 + \arg z_2. \end{aligned}$$

Nur “spezielle” Funktionen erfüllen derartige Identitäten; gerade darum sind sie so interessant.

① Gesucht sind die (stetigen) Funktionen, die der folgenden Funktionalgleichung genügen:

$$\forall x, x' > 0 : f(x \cdot x') = f(x) \cdot f(x') .$$

Lösung: Außer $f(x) \equiv 0$ sind dies genau die Funktionen $f(x) := x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ fest. (Wie man darauf kommt und warum es keine andern gibt, können wir hier nicht erörtern.) \bigcirc

Am allerhäufigsten ist die “innere Eigenschaft” der gesuchten Funktionen $t \mapsto y(t)$ in der Form eines Wachstumsgesetzes gegeben: Die momentane zeitliche Änderungsrate $\dot{y}(t)$ (oder die Momentanbeschleunigung $\ddot{y}(t)$) ist eine gegebene Funktion der Zeit t und vor allem des Istwertes $y(t)$ (eventuell auch von $\dot{y}(t)$):

$$\dot{y} = F(t, y) \quad \text{bzw.} \quad \ddot{y} = F(t, y, \dot{y}) .$$

Eine derartige Gleichung heißt eine **Differentialgleichung**. Gesucht sind Funktionen $y(\cdot)$, für die gilt:

$$\forall t : \dot{y}(t) = F(t, y(t)) \quad \text{bzw.} \quad \ddot{y}(t) = F(t, y(t), \dot{y}(t)) .$$

② Ein frei fallender Körper (Fig. 2.1.6) sei der als konstant angenommenen Erdbeschleunigung $g := 9.81 \text{ m/sec}^2$ unterworfen. Wir fragen nach seinem “Fahrplan” $t \mapsto y(t)$. Nach Annahme gilt $\ddot{y}(t) = -g$ für alle t , in anderen Worten: Die gesuchte Funktion $y(\cdot)$ genügt der Differentialgleichung (zweiter Ordnung)

$$\ddot{y} = -g .$$

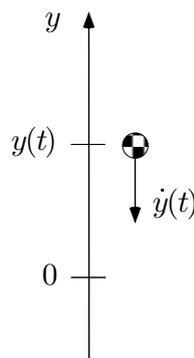


Fig. 2.1.6

Diese Differentialgleichung hat unendlich viele Lösungen, nämlich genau die Funktionen

$$y(t) := -\frac{g}{2}t^2 + At + B, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Zur Festlegung der sogenannten Integrationskonstanten A, B sind weitere Angaben, zum Beispiel über Ort und Geschwindigkeit zur Zeit $t := 0$, notwendig. \bigcirc

Bei gewissen geometrischen Problemen wird nach Kurven $\sigma: y = f(x)$ gefragt, deren Tangenten bestimmte Bedingungen erfüllen. Zum Beispiel sollen die gesuchten Kurven sämtliche Kurven einer gegebenen Kurvenschar Γ senkrecht schneiden (Fig. 2.1.7). Ein derartiges Problem führt auf eine Differentialgleichung der Form

$$y' = F(x, y)$$

mit einer bekannten Funktion $F(\cdot, \cdot)$, denn für jeden von der Schar Γ bedeckten Punkt (x, y) läßt sich leicht ausrechnen, welche Steigung die durch diesen Punkt gehende "Orthogonaltrajektorie" dort haben muß. — Von Kurvenscharen handelt der Abschnitt 5.6.

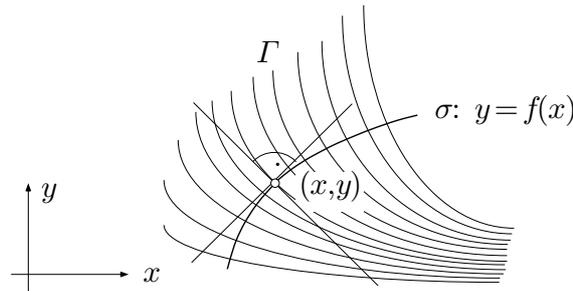


Fig. 2.1.7

Typologie der Funktionen in diesem Buch

Als Definitions- und Zielbereiche der in der Analysis betrachteten Funktionen $f: A \rightarrow B$ kommen in erster Linie die in Kapitel 1 behandelten Grundstrukturen $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ oder vernünftige Teilmengen davon (zum Beispiel Intervalle, Kreisscheiben, Sphären) in Frage. Ein wesentliches Anliegen von späteren Kapiteln wird sein, die von den Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ her vertrauten Begriffe (Grenzwert, Stetigkeit, Ableitung, Integral usw.) auf mehrdimensionale Situationen zu übertragen. Wir wollen aber schon jetzt auf die sich darbietenden Typen, Figuren und Interpretationen aufmerksam machen.

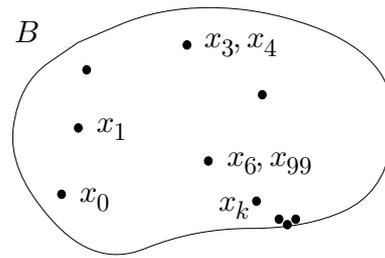


Fig. 2.1.8

$$\boxed{\mathbb{N} \rightarrow B}$$

Es sei B eine beliebige Menge (Fig. 2.1.8) und x Variable für Elemente von B . Eine Funktion

$$x: \mathbb{N} \rightarrow B, \quad k \mapsto x_k$$

von \mathbb{N} in den Zielbereich B heißt eine **Folge**. Ist $B = \mathbb{R}$ oder $B = \mathbb{C}$, so spricht man von einer **Zahlfolge**. Die einzelnen Funktionswerte x_k sind die **Glieder** der Folge. Anstelle von x , schreibt man auch $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, wenn man die ganze Folge meint. — Von Folgen handelt der Abschnitt 2.4.

$$\boxed{\mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}}$$

Der Funktionstyp $f: \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$ stellt das “Grundmodell” der Funktionenlehre dar. Wir wollen die betreffenden Funktionen **reelle Funktionen** nennen; von ihnen handelt ein Großteil der folgenden Abschnitte und Kapitel.

Der Definitionsbereich einer reellen Funktion ist in aller Regel ein Intervall,

Bsp:

$$\begin{aligned} \text{dom}(\sin) &= \mathbb{R}, \\ f(x) &:= \sqrt{1-x^2} \implies \text{dom}(f) = [-1, 1], \\ g(x) &:= 1/\sqrt{1-x^2} \implies \text{dom}(g) =]-1, 1[, \end{aligned}$$

oder eine Vereinigung von Intervallen,

$$\text{Bsp:} \quad \text{dom}(\tan) = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \left] k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2} \right[.$$

Die meisten der in der Praxis vorkommenden Funktionen $f: \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$ besitzen eine natürliche **Fortsetzung** $\tilde{f}: \mathbb{C} \curvearrowright \mathbb{C}$, und oft ist erst von da her eine befriedigende Theorie der betreffenden Funktionen möglich. Wir haben das bei den Polynomen gesehen (Fundamentalsatz der Algebra); dasselbe trifft zu für die Exponentialfunktion (s.u.). — Von den Funktionen $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ im

allgemeinen handelt die sogenannte **komplexe Analysis**, auch einfach **Funktionentheorie** genannt.

③ Die Funktion

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2}$$

ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert und so “schön”, wie man nur will. Für $|x| < 1$ gilt

$$f(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$

(geometrische Reihe); für $|x| \geq 1$ ist aber die Reihe rechter Hand divergent und stellt die Funktion nicht mehr dar. Die Ursache dieses beim Betrag 1 eintretenden “Konvergenzzusammenbruchs” wird erst erkennbar, wenn wir die Fortsetzung

$$\tilde{f}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$$

betrachten (Fig. 2.1.9): Potenzreihen wie die obige konvergieren im Komplexen grundsätzlich auf Kreisscheiben, siehe Satz (2.9). Da die Funktion \tilde{f} in den Punkten $\pm i$ eine Singularität (einen sogenannten **Pol**) besitzt, kann der Konvergenzradius der zugehörigen Reihe nicht größer als 1 sein. \circ

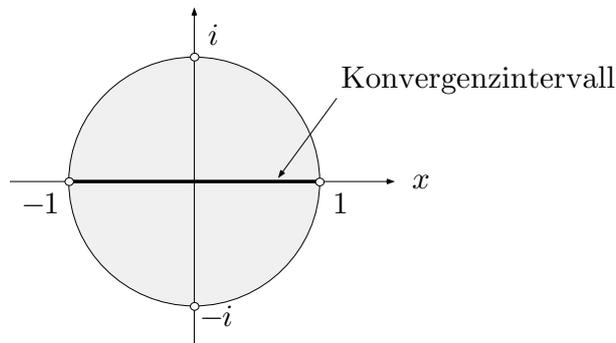


Fig. 2.1.9

$$\mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}^3$$

Ist der Zielbereich einer Funktion f mehrdimensional, so sprechen wir von einer **vektorwertigen Funktion**. Für vektorwertige Funktionen verwenden wir

im allgemeinen halbfette Buchstaben: \mathbf{f} , $\mathbf{x}(\cdot)$, $\mathbf{r}(\cdot)$. Eine vektorwertige Funktion läßt sich festlegen durch Angabe der zugehörigen **Koordinatenfunktionen** f_i :

$$t \mapsto \mathbf{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t)), \quad t \mapsto \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t));$$

es geht aber auch ohne Koordinaten:

$$\text{Bsp:} \quad \mathbf{f}: \quad t \mapsto \cos t \mathbf{a} + \sin t \mathbf{b} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

(dieses \mathbf{f} produziert eine Ellipse mit konjugierten Halbmessern \mathbf{a} und \mathbf{b}).

Allgemein: Ist I ein Intervall der als Zeitachse interpretierten t -Achse, so produziert eine Funktion

$$\mathbf{f}: \quad I \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (x(t), y(t))$$

eine Kurve γ in der Ebene und

$$\mathbf{f}: \quad I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$$

eine Kurve im dreidimensionalen Raum: Durchläuft die Variable t das Intervall I , so durchläuft der Bildpunkt $\mathbf{f}(t)$ gerade die Kurve γ (Fig. 2.1.10). Die Funktion \mathbf{f} heißt eine **Parameterdarstellung** von γ . (Diese Namengebung ist etwas unglücklich, denn die Variable t ist gerade *kein* Parameter, sondern eine ‐laufende‐ Variable. Unter einem **Parameter** versteht man üblicherweise eine einstellbare, im weiteren aber *festgehaltene* Größe.) Wenn es darum geht, etwa die Länge, die Krümmung oder den von γ eingeschlossenen Flächeninhalt zu berechnen, so ist man auf eine Parameterdarstellung angewiesen; die Gleichungsform

$$\gamma := \{ (x, y) \mid F(x, y) = 0 \}$$

hilft einem da gar nichts.

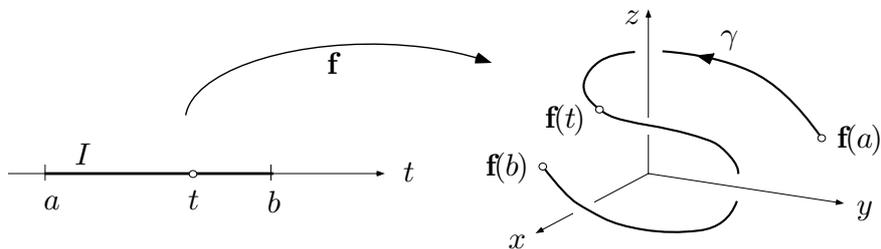


Fig. 2.1.10

Jede Parameterdarstellung beinhaltet einen ganz bestimmten “Fahrplan”, nach dem die Kurve γ durchlaufen werden soll. Eine und dieselbe Kurve besitzt viele verschiedene Parameterdarstellungen, entsprechend den verschiedenen denkbaren “Fahrplänen”. Wenn es sich nicht um einen bestimmten zeitlichen Bewegungsablauf handelt, sondern nur um den geometrischen Gehalt der betreffenden Kurve, so wird man wenn möglich eine längs der Kurve veränderliche geometrische Größe als “Parameter” (unabhängige Variable) wählen, zum Beispiel die x -Koordinate oder das Argument des laufenden Punktes oder dessen längs der Kurve gemessenen Abstand vom Anfangspunkt, die sogenannte **Bogenlänge**. — Wir geben einige Beispiele.

④ Eine als Graph

$$\gamma: y = f(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

gegebene ebene Kurve läßt sich ohne weiteres auch parametrisch darstellen: Man schreibt

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases}$$

oder einfach

$$\gamma: x \mapsto (x, f(x)) \quad (a \leq x \leq b),$$

denn auf den Namen der unabhängigen Variablen kommt es nicht an, und da kann man schon gleich den Namen der als Parameter gewählten geometrischen Größe, hier: x , verwenden. \circ

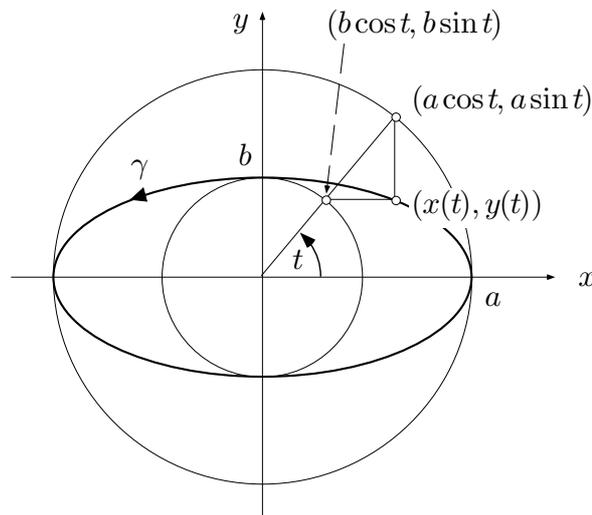


Fig. 2.1.11

⑤ Sind a und b gegebene positive Zahlen, so stellt

$$\gamma: t \mapsto \begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = b \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

eine Ellipse mit Halbachsen a und b dar (Fig. 2.1.11), denn γ entsteht aus dem Einheitskreis $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ durch Streckung um den Faktor a in x -Richtung und um den Faktor b in y -Richtung. Die Variable t bezeichnet nicht etwa das Argument des laufenden Ellipsenpunktes $P := (x, y)$, sondern das Argument eines mit P verknüpften Kreispunktes (siehe die Figur).

Man kann es auch so sehen: Es ist

$$\frac{x^2(t)}{a^2} + \frac{y^2(t)}{b^2} \equiv 1;$$

folglich genügen sämtliche Punkte von γ der Ellipsengleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

○

⑥ Für eine Parameterdarstellung der **Schraubenlinie** (Fig. 2.1.12) mit Radius R und Ganghöhe h liegt es nahe, die geometrische Größe $\arg(x, y)$ als Parameter zu wählen. Es ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} x(\phi) &= R \cos \phi \\ y(\phi) &= R \sin \phi \\ z(\phi) &= h \frac{\phi}{2\pi} \end{aligned} \right\} \quad (-\infty < \phi < \infty).$$

○

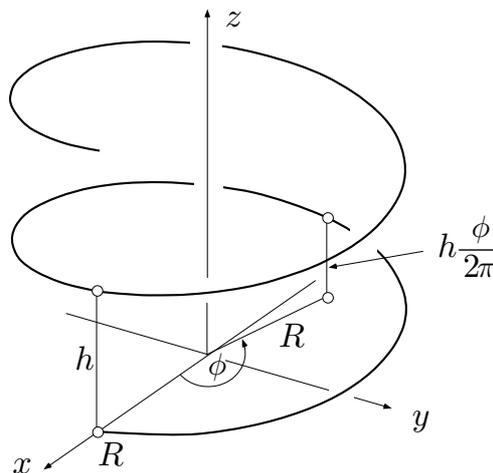


Fig. 2.1.12

$$\mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{C}$$

Funktionen $\mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{C}$ lassen sich erstens als Parameterdarstellungen $t \mapsto z(t)$ von Kurven in der komplexen Ebene auffassen. So ist zum Beispiel

$$\partial D: \quad t \mapsto z(t) := e^{it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

eine Parameterdarstellung des Einheitskreises (= Rand der Einheitskreisscheibe D , Fig. 2.1.13). Diese Vorstellung spielt eine entscheidende Rolle in der komplexen Analysis, wo komplexe Funktionen in bestimmter Weise längs derartigen Kurven integriert werden.

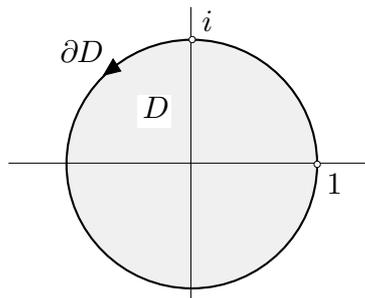


Fig. 2.1.13

Zweitens kann man eine Funktion

$$f: \quad \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{C}, \quad t \mapsto f(t)$$

als zahlenwertige Funktion auffassen, wobei diese Werte nicht reelle, sondern eben komplexe Zahlen sind. Wie ein derartiger komplexer Wert physikalisch interpretiert werden soll, ist im Einzelfall auszumachen. — Wir behandeln als Beispiel die komplexe Schreibweise der harmonischen Schwingungen.

Exkurs über harmonische Schwingungen

Die reellwertige Funktion

$$x(t) := A \cos(\omega t + \alpha) \tag{2}$$

beschreibt eine **harmonische Schwingung** (Fig. 2.1.14): Man stelle sich einen Massenpunkt vor, der längs der x -Achse hin und her schwingt. $A > 0$ ist die **Amplitude**, $\omega > 0$ die **Kreisfrequenz** und $\alpha \in]-\pi, \pi]$ die **Phase** dieser Schwingung. Die Kreisfrequenz ω (= pro Zeiteinheit durchlaufener “Winkel”) ist mit der **Frequenz** ν (= Anzahl Vollschrwingungen pro Zeiteinheit) verknüpft durch

$$\nu = \omega / 2\pi$$

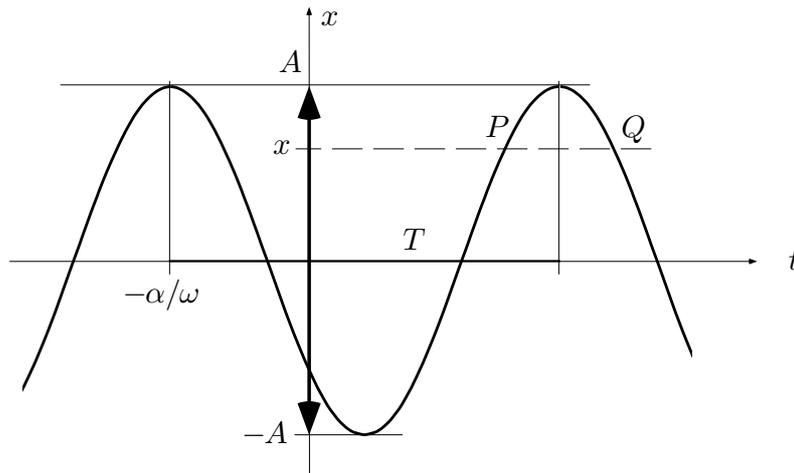


Fig. 2.1.14

und mit der **Schwingungsdauer** T (= Zeitdauer zwischen zwei aufeinanderfolgenden Maxima) durch

$$T = 2\pi / \omega .$$

Die Phase α gibt den "Zustand" des schwingenden Systems zur Zeit $t := 0$ an. Allgemein ist der "Zustand" zur Zeit t durch den "Winkel" $\omega t + \alpha$ bestimmt und nicht etwa durch die Lagekoordinate $x(t)$. Zu einem gegebenen x -Wert gehören nämlich im allgemeinen zwei verschiedene "Zustände" (Punkte P und Q in der Figur).

Die Funktion (2) läßt sich übrigens auch in der zweiteiligen Form

$$x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \quad (3)$$

schreiben: Aus (2) folgt nach dem Additionstheorem für den Cosinus:

$$x(t) = A(\cos(\omega t) \cos \alpha - \sin(\omega t) \sin \alpha) ;$$

es gilt also (3) mit

$$a = A \cos \alpha , \quad b = -A \sin \alpha . \quad (4)$$

Umgekehrt läßt sich (3) in die einteilige Form (2) überführen, indem man die Gleichungen (4) nach A und α auflöst. Man findet ohne weiteres

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} .$$

Folglich ist dann

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} , \quad \sin \alpha = \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}} ,$$

und diese Angaben bestimmen α modulo 2π . Alles in allem haben wir

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \alpha = \arg(a, -b) \quad (= \arctan \frac{-b}{a}, \text{ falls } a > 0).$$

Wir haben wiederholt angedeutet, daß der Momentanzustand des schwingenden Systems durch einen “Winkel” charakterisiert ist. Wir bringen diesen Winkel explizit ins Spiel, indem wir die hin- und hergehende Bewegung auf der x -Achse als “Schatten” (genau: als Realteil) einer gedachten Kreisbewegung in der komplexen Ebene auffassen (Fig. 2.1.15):

$$x(t) = A \cos(\omega t + \alpha) = \operatorname{Re} (Ae^{i(\omega t + \alpha)}) .$$

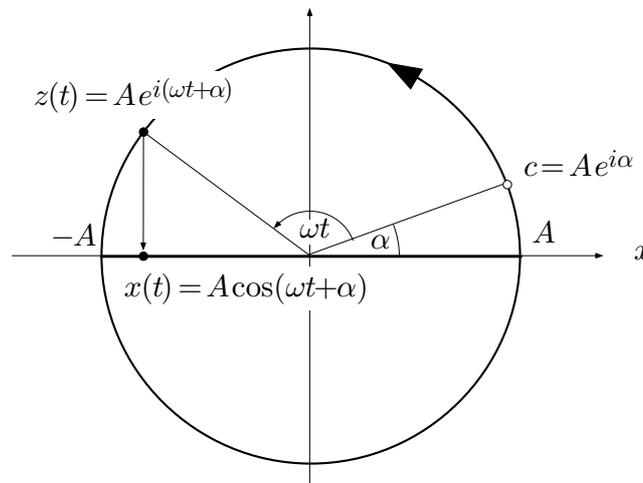


Fig. 2.1.15

Die genannte Kreisbewegung ist also gegeben durch

$$z(t) = Ae^{i(\omega t + \alpha)},$$

und das Argument des kreisenden Punktes ist der “Winkel”, von dem wir dauernd sprechen. Setzen wir zur Abkürzung

$$Ae^{i\alpha} =: c,$$

so erhält diese Kreisbewegung die Form

$$z(t) = ce^{i\omega t} \quad (-\infty < t < \infty).$$

Die komplexe Zahl c heißt die **komplexe Amplitude** oder auch der **Zeiger** der betrachteten Schwingung. In dieser Zahl sind Amplitude und Phase gleichzeitig gespeichert, und zwar stellt c die Lage des kreisenden Punktes zur Zeit $t := 0$ dar.

Der Erfolg dieses Ansatzes (vor allem in der Elektrotechnik) beruht letzten Endes darauf, daß für die Funktion $\phi \mapsto e^{i\phi}$ ein besonders einfaches “Additionstheorem”, eben $e^{i(\phi + \phi')} = e^{i\phi} \cdot e^{i\phi'}$, gilt. Wir beweisen darüber:

(2.1) Sind $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)$ zwei harmonische Schwingungen der gleichen Kreisfrequenz ω mit komplexen Amplituden c_1 , c_2 , so ist ihre **Superposition**

$$x(\cdot) := x_1(\cdot) + x_2(\cdot)$$

die harmonische Schwingung der Kreisfrequenz ω mit komplexer Amplitude $c_1 + c_2$.

┌

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) = \operatorname{Re}(c_1 e^{i\omega t}) + \operatorname{Re}(c_2 e^{i\omega t}) \\ &= \operatorname{Re}((c_1 + c_2)e^{i\omega t}). \end{aligned}$$

└

⑦ Die Phasen dreier Schwingungen gleicher Kreisfrequenz und gleicher Amplitude sollen so festgelegt werden, daß die Superposition der drei Schwingungen identisch verschwindet.

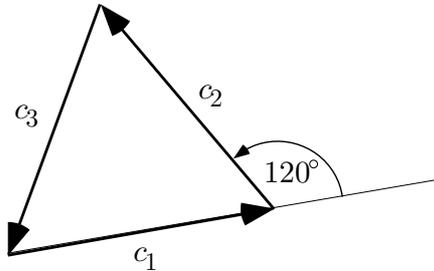


Fig. 2.1.16

Die komplexen Amplituden c_1 , c_2 , c_3 der drei Schwingungen sind drei gleich lange Vektoren der Summe 0. Die Additionsfigur ist somit ein gleichseitiges Dreieck (Fig. 2.1.16), und die gesuchten Phasendifferenzen betragen 120° .

○

Funktionen von mehreren Variablen

$$\mathbb{R}^2 \curvearrowright \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^3 \curvearrowright \mathbb{R}$$

Besitzt eine Funktion

$$f: \mathbb{R}^n \curvearrowright \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})$$

einen "echt n -dimensionalen" Definitionsbereich, so spricht man von einer **Funktion von n Variablen**. Im Fall $n = 2$ läßt sich eine derartige Funktion

auffassen als ‐Temperaturverteilung‐ in der Ebene: Für jeden Punkt $(x, y) \in \text{dom}(f)$ ist eine ‐Temperatur‐ $f(x, y)$ festgelegt. Zur Visualisierung von Temperaturverteilungen verwendet man zum Beispiel in Wetterkarten die sogenannten **Isothermen**; das sind die ‐Kurven gleicher Temperatur‐.

Allgemein: Ist $f: A \rightarrow B$ eine beliebige Funktion, so kann man für jedes gegebene $c \in B$ die Menge derjenigen $x \in A$ bilden, für die $f(x) = c$ ist. Diese Menge heißt das **Urbild** des Punktes c und wird mit $f^{-1}(c)$ bezeichnet:

$$f^{-1}(c) := \{x \in A \mid f(x) = c\}.$$

Geht es um eine Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und ein gegebenes $C \in \mathbb{R}$, so heißt $f^{-1}(C)$ die **Niveaulinie** von f zum Niveau C (Fig. 2.1.17) — wir schreiben dafür auch N_C :

$$N_C := \{(x, y) \in \text{dom}(f) \mid f(x, y) = C\}.$$

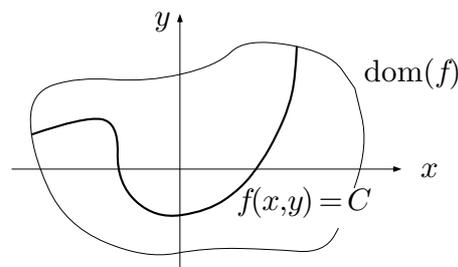


Fig. 2.1.17

N_C ist in aller Regel eine Kurve oder eine Vereinigung von Kurven, eventuell mit Singularitäten. (Dieser Sachverhalt wird in Kapitel 5 genauer untersucht.) Zeichnet man die Niveaulinien für hinreichend viele verschiedene Werte C , so erhält man ein anschauliches Bild des globalen Funktionsverlaufs.

⑧ Wir zeichnen einige Niveaulinien der Funktion

$$f(x, y) := \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

(Fig. 2.1.18). Der Funktionswert an der Stelle (x, y) ist das Produkt der Abstände von (x, y) zu den beiden Punkten $(\pm 1, 0)$. N_1 ist die sogenannte **Lemniskate**; allgemein heißen die hier betrachteten Niveaulinien N_C ($C > 0$) **Cassinische Kurven**. ○

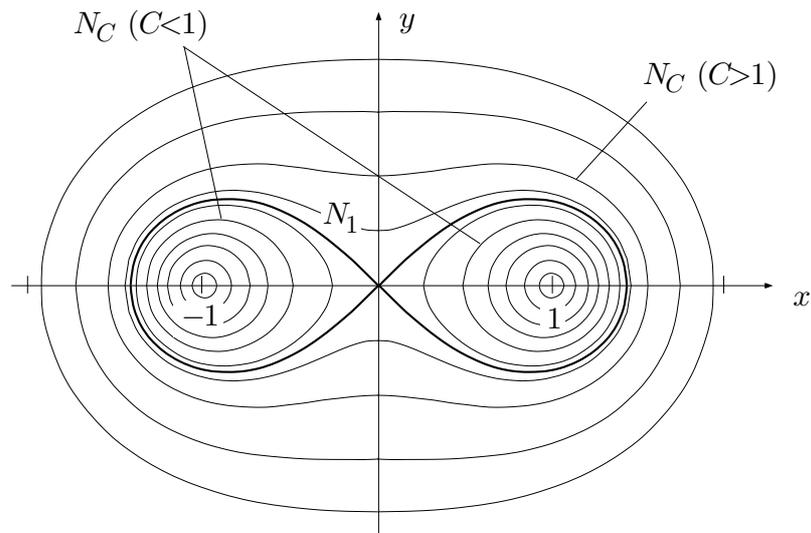


Fig. 2.1.18

Oft interessiert übrigens nicht die Funktion f als Ganzes, sondern in erster Linie eine bestimmte Kurve γ , die als Niveaulinie von f dargestellt werden kann:

$$\gamma: \quad f(x, y) = C .$$

Bsp: Die Ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ läßt sich als N_1 der quadratischen Funktion

$$q(x, y) := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

auffassen.

Sinngemäß dasselbe ist zu sagen über Funktionen $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ (“Temperaturverteilungen” im Raum). Anstelle von Niveaulinien gibt es hier **Niveauflächen**. Umgekehrt lassen sich viele interessante Flächen in der Form

$$f(x, y, z) = C$$

darstellen, das heißt: als Niveaufläche N_C einer gewissen Funktion von drei Variablen auffassen.

Bsp: Das **einschalige (Rotations-)Hyperboloid** besitzt in kartesischen Koordinaten die Gleichung

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

(und folglich in Zylinderkoordinaten die Gleichung $\rho^2 - z^2 = 1$, Fig. 2.1.19) und ist damit Niveaufläche der quadratischen Funktion

$$q(x, y, z) := x^2 + y^2 - z^2 .$$

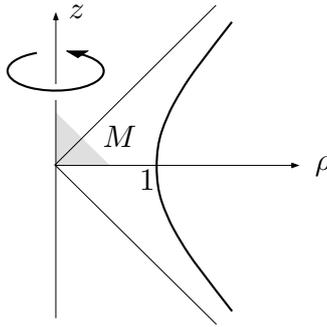


Fig. 2.1.19

Eine Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ lässt sich zweitens mit Hilfe ihres Graphen

$$\mathcal{G}(f) := \{ (x, y, z) \mid (x, y) \in \text{dom}(f), z = f(x, y) \}$$

in einer dreidimensionalen Figur repräsentieren (Fig. 2.1.20). Der Graph ist eine Fläche, die **schlicht** über der (x, y) -Ebene liegt; das heißt: Senkrecht über (oder eventuell unter) jedem Punkt $(x, y) \in \text{dom}(f)$ liegt genau ein Punkt des Graphen. Die Niveaulinien von f sind die Höhenkurven der Graphenfläche, wenn $\text{dom}(f)$ als topographische Karte dieser Fläche benutzt wird.

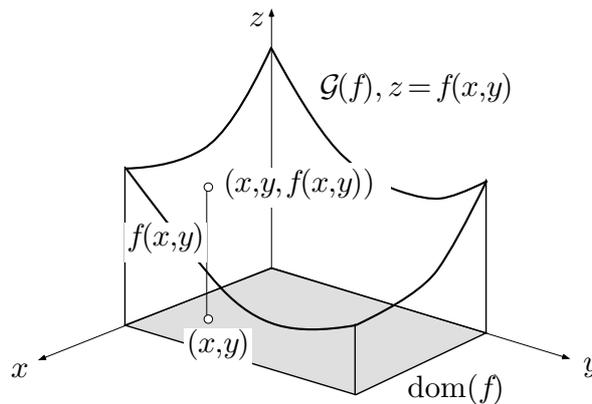


Fig. 2.1.20

⑨ Wir betrachten die Funktion

$$f(x, y) := xy, \quad \text{dom}(f) := [-1, 1]^2.$$

Der zugehörige Graph (Fig. 2.1.21) ist von der Gestalt her eine sogenannte **Sattelfläche**. Die hier vorliegende spezielle Fläche zweiten Grades heißt **hyperbolisches Paraboloid**. ○

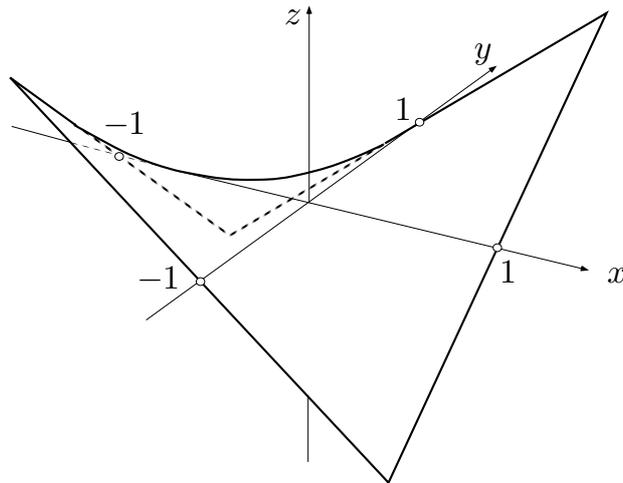


Fig. 2.1.21

$$\mathbb{R}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^3$$

Abbildungen $\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^3$ sind typischer Weise Parameterdarstellungen von krummen Flächen.

Eine Kurve $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ ist eine ‐eindimensionale Mannigfaltigkeit‐. Zu einer Parameterdarstellung von γ gehören als Standardmodell einer derartigen Mannigfaltigkeit ein Intervall I der t -Achse und eine vektorwertige Funktion

$$\mathbf{f}: I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \mathbf{x}(t),$$

die die einzelnen Kurvenpunkte produziert.

Eine Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ ist eine ‐zweidimensionale Mannigfaltigkeit‐. Zu einer Parameterdarstellung von S gehören als Standardmodell einer derartigen Mannigfaltigkeit ein Bereich A in der (u, v) -Ebene und eine vektorwertige Funktion

$$\mathbf{f}: A \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto \mathbf{f}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

die für jeden ‐Parameterpunkt‐ $(u, v) \in A$ einen Raumpunkt $\mathbf{f}(u, v)$ liefert, siehe die Fig. 2.1.22. Durchläuft (u, v) den **Parameterbereich** A , so durchläuft $\mathbf{f}(u, v)$ die Fläche S .

Bei allgemeinen Betrachtungen über Flächen verwenden wir u, v als Parameter. Sobald man aber eine konkrete, geometrisch beschriebene Fläche vor sich hat, wählt man (wie bei Kurven) auf der Fläche variable geometrische Größen als Parameter und behält deren Namen bei. Die folgenden Beispiele sollen das erläutern; siehe auch die Beispiele 1.5.② (Torus) und 1.6.③ (Ebene).

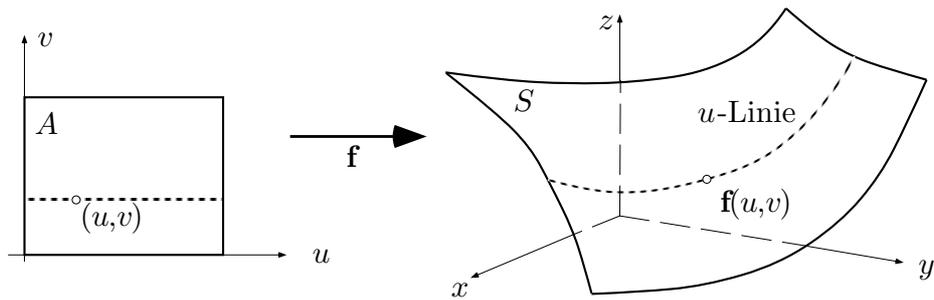


Fig. 2.1.22

⑩ Ist S zunächst als Graph einer Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben (siehe die Fig. 2.1.23):

$$S: \quad z = f(x, y) \quad ((x, y) \in A),$$

so erhält man sofort eine Parameterdarstellung von S mit dem Parameterbereich A , indem man ansetzt:

$$\mathbf{f}: \quad A \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x, y, f(x, y)).$$

○

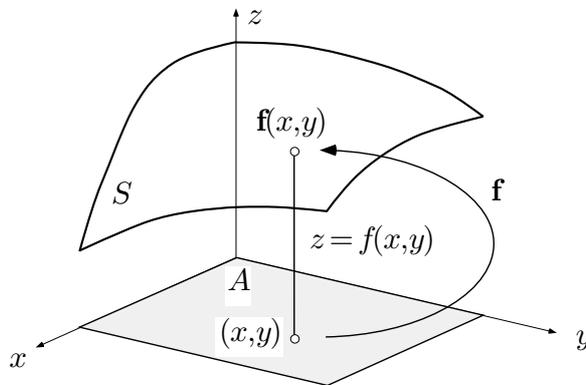


Fig. 2.1.23

⑪ S_R^2 , die zweidimensionale Sphäre vom Radius R , besitzt die Parameterdarstellung

$$\mathbf{f}: \quad (\phi, \theta) \mapsto \begin{cases} x(\phi, \theta) = R \cos \theta \cos \phi \\ y(\phi, \theta) = R \cos \theta \sin \phi \\ z(\phi, \theta) = R \sin \theta \end{cases}$$

(Fig. 2.1.24). Parameterbereich ist das Rechteck $[0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ in der (ϕ, ϑ) -Ebene. Längs den Kanten $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ ist diese Darstellung nicht "regulär", da diese Kanten auf je einen Punkt (N und S) abgebildet werden. ○

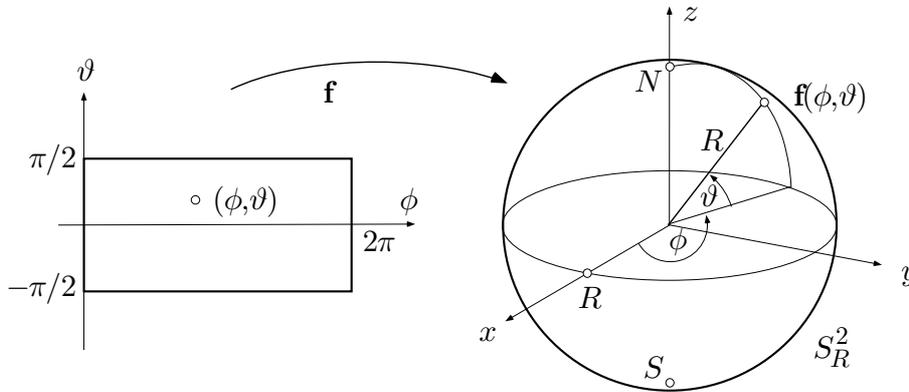


Fig. 2.1.24

$$\mathbb{R}^3 \curvearrowright \mathbb{R}^3$$

Eine Abbildung

$$\mathbf{f}: \mathbb{R}^3 \curvearrowright \mathbb{R}^3, \quad (u, v, w) \mapsto (x, y, z)$$

läßt sich erstens als Parameterdarstellung eines Bereichs B im (x, y, z) -Raum auffassen. Das ist dann von Interesse (und spielt eine wichtige Rolle in der "mehrdimensionalen Integralrechnung"), wenn sich ein gegebener Bereich B in kartesischen Koordinaten nur sehr umständlich beschreiben läßt.

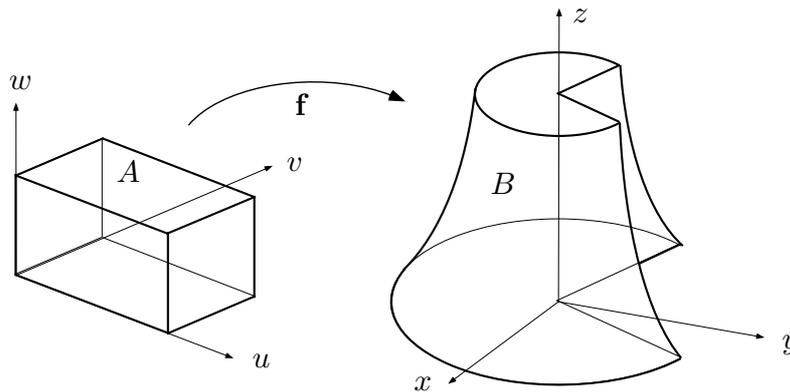


Fig. 2.1.25

Man ersetzt dann diese Beschreibung durch eine Parameterdarstellung mit einem Parameterbereich A im (u, v, w) -Raum, der wenn irgend möglich ein achsenparalleler Quader ist (Fig. 2.1.25). Gelegentlich wird dann der Bereich A gar nicht gezeichnet, sondern man faßt u, v, w als "neue Koordinaten" im (x, y, z) -Raum auf und bringt sie in geeigneter Weise in der (x, y, z) -Figur zur Darstellung. Siehe dazu etwa die Figur 1.5.11.

⑫ Es sei B der von den drei linear unabhängigen Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ aufgespannte Spat und $I := [0, 1]^3$ der Einheitswürfel im (u, v, w) -Raum. Dann ist

$$\mathbf{f}: I \rightarrow B, \quad (u, v, w) \mapsto u\mathbf{a} + v\mathbf{b} + w\mathbf{c}$$

eine Parameterdarstellung von B (Fig. 2.1.26). ○

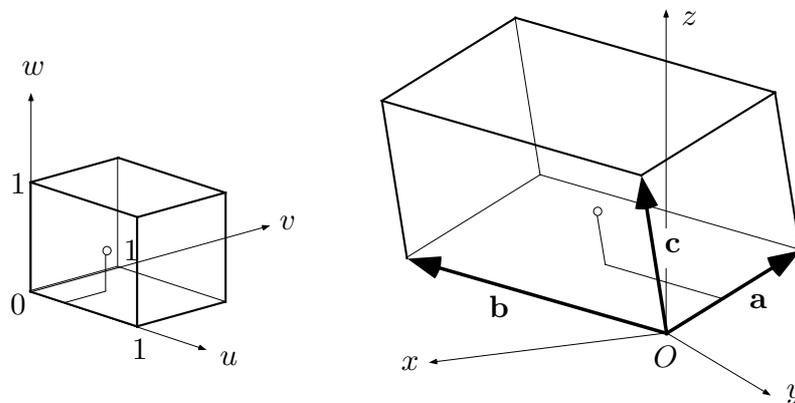


Fig. 2.1.26

⑬ Die Kugelkoordinaten liefern eine Parameterdarstellung der Kugel

$$B_R := \{ (x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq R \};$$

Parameterbereich ist ein Quader im (r, ϕ, θ) -Raum:

$$\mathbf{f}: [0, R] \times [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow B_R$$

$$(r, \phi, \theta) \mapsto \begin{cases} x = r \cos \theta \cos \phi \\ y = r \cos \theta \sin \phi \\ z = r \sin \theta \end{cases} .$$

Dabei wird die ganze Seitenfläche $r = 0$ des Quaders auf den einzigen Punkt O abgebildet. Da aber diese Seitenfläche kein Volumen besitzt und der Punkt O auch nicht, spielt das zum Beispiel für die Zwecke der Integration keine Rolle. ○

Eine vektorwertige Funktion

$$\mathbf{K}: \mathbb{R}^3 \curvearrowright T\mathbb{R}^3, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{K}(\mathbf{x}) \quad (5)$$

läßt sich noch zu einem ganz anderen Zweck verwenden, nämlich zur Produktion eines Vektorfelds. Das sechste Kapitel dieses Texts, “Vektoranalysis”, ist ganz den Vektorfeldern gewidmet und bildet die mathematische Grundlage der Elektrodynamik.

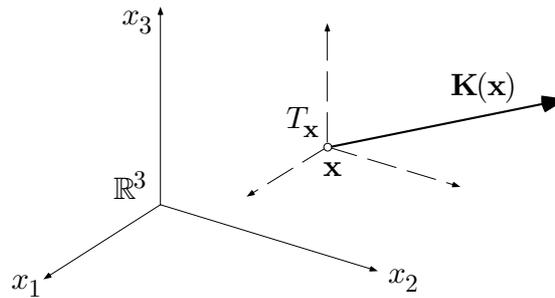


Fig. 2.1.27

Der Funktionswert an der Stelle \mathbf{x} ist hier ein Vektor $\mathbf{K}(\mathbf{x})$, der im Punkt \mathbf{x} “anzuheften” ist und zum Beispiel das elektrische Feld oder die Geschwindigkeit einer strömenden Flüssigkeit in diesem Punkt darstellen kann (siehe die Fig. 2.1.27). Dieses “Anheften” ist folgendermaßen zu verstehen: Der Punkt \mathbf{x} wird als Ursprung eines neuen Raumes $T_{\mathbf{x}}$, des **Tangentialraumes** von \mathbf{x} , angesehen (darauf bezieht sich das ‘ T ’ in der Formel (5)), und $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ ist ein Vektor in diesem Tangentialraum oder eben ein **Tangentialvektor** im Punkt \mathbf{x} . Ist in dieser Weise für jeden Punkt \mathbf{x} eines Raumteils $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Tangentialvektor $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ erklärt, so nennt man $\mathbf{K}(\cdot)$ ein **Vektorfeld** auf Ω und zeichnet eine Figur in der Art von Fig. 2.1.28.

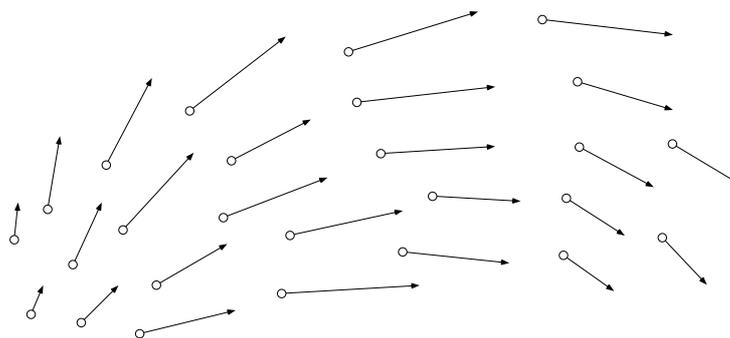


Fig. 2.1.28

⑭ Im Ursprung befinde sich eine Punktladung $q > 0$. Diese Punktladung erzeugt ein elektrisches Feld $\mathbf{E}(\cdot)$, genannt **Coulombfeld**. Das Feld $\mathbf{E}(\cdot)$ ist proportional zu q , radial nach außen gerichtet, und sein Betrag nimmt mit dem Quadrat des Abstandes von $\mathbf{0}$ ab. Da die Situation kugelsymmetrisch ist, brauchen wir in Fig. 2.1.29 nur die wesentliche Koordinate r darzustellen. Es gilt also für eine geeignete, vom Maßsystem abhängige Konstante $c > 0$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{cq}{r^2} \frac{\mathbf{x}}{r},$$

wobei \mathbf{x}/r einen radial nach außen gerichteten Einheitsvektor an der Stelle \mathbf{x} darstellt. In Koordinaten ausgeschrieben sieht das Feld $\mathbf{E}(\cdot)$ folgendermaßen aus:

$$\mathbf{E}(x_1, x_2, x_3) = \frac{cq}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \left(\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}, \frac{x_3}{r} \right).$$

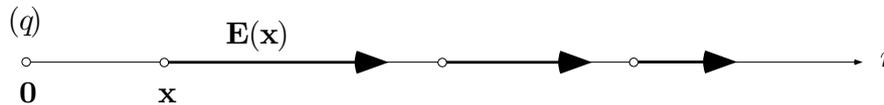


Fig. 2.1.29

Aufgaben

1. Produziere

- (a) die Polardarstellung,
- (b) eine Parameterdarstellung

einer Kurve, welche ungefähr so aussieht wie die Kurve in Figur 2.1.30. Zeichne Deinen Vorschlag mit Hilfe von ①. (*Hinweis*: Verwende eine Funktion der Form

$$r(\phi) := \frac{1}{1 - \varepsilon \cos(c\phi)} .)$$

2. ① Zeichne das Niveaulinienportrait der Funktion

$$f(x, y) := \frac{(x-1)^2 + y^2}{(x+1)^2 + y^2} .$$

Beschreibe den geometrischen Gehalt dieser Aufgabe und ihrer Lösung in Worten.

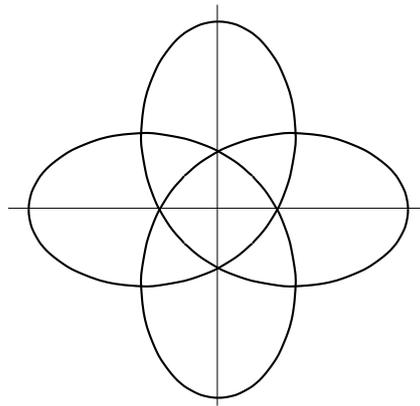


Fig. 2.1.30

3. Eine gegebene harmonische Schwingung der Amplitude A wird von einer zweiten Schwingung derselben Kreisfrequenz überlagert, wobei die Amplitude dieser Störung höchstens $A/2$ beträgt. Um welchen Betrag können sich dabei Amplitude und Phase der ursprünglichen Schwingung höchstens verändern? (*Hinweis*: Geometrisch argumentieren!)
4. Zwischen drei harmonischen Schwingungen gleicher Kreisfrequenz bestehen folgende Phasendifferenzen: 60° zwischen der ersten und der zweiten, 150° zwischen der zweiten und der dritten, 150° zwischen der dritten und der ersten. Die Summe der drei Schwingungen verschwindet identisch. Wie verhalten sich die Amplituden?
5. Betrachte den Halbkreisbogen $\gamma := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, x \geq 0\}$ sowie die in der ganzen (x, y) -Ebene definierte Funktion

$$f(x, y) := \text{“Distanz von } (x, y) \text{ zum nächstgelegenen Punkt von } \gamma \text{”} .$$

Gewünscht ist eine formelmäßige Darstellung von $f(x, y)$ mit möglichst wenig Verzweigungen. (*Hinweis*: Die Lösung ergibt sich im wesentlichen durch Inspektion der Figur; wenn nötig die Betragsfunktion verwenden.)

2.2 Eigenschaften von Funktionen

Surjektiv, injektiv, bijektiv

Wir beginnen diesen Abschnitt mit einigen Definitionen für Funktionen (Abbildungen) $f: A \rightarrow B$ im allgemeinen; A und B sind irgendwelche Mengen. Angegeben ist $\text{dom}(f) = A$. Gilt auch $\text{im}(f) = B$, in Worten: Tritt jeder Punkt y des angebotenen Zielbereichs B tatsächlich als Funktionswert auf, so heißt f **surjektiv**, altmodisch: eine Abbildung von A **auf** B .

Bsp: Die reelle Funktion

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) := x^3 - 2x$$

(Fig. 2.2.1) ist surjektiv, die Funktion $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hingegen nicht wegen $\text{im}(\sin) = [-1, 1] \neq \mathbb{R}$.

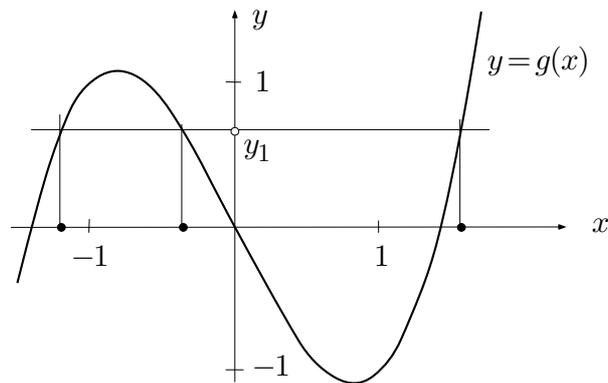


Fig. 2.2.1

Die Funktion (Abbildung) f heißt **injektiv**, altmodisch: **eindeutig**, wenn sie in verschiedenen Punkten verschiedene Werte annimmt, in anderen Worten: wenn aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt: $x_1 = x_2$.

Bsp: Die eben betrachtete Funktion g ist nicht injektiv; so wird etwa der Wert y_1 an drei verschiedenen Stellen angenommen. Die eingeschränkte Funktion

$$\sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$$

ist injektiv, da \sin in dem angegebenen Intervall streng monoton wächst. Parameterdarstellungen von Kurven, Flächen oder räumlichen Bereichen sind "im wesentlichen" injektiv.

Ist $f: A \rightarrow B$ surjektiv und injektiv, so heißt f **bijektiv**. Eine bijektive Abbildung verheiratet die Elemente von A monogam mit denjenigen von B , so daß am Schluß von keiner Sorte eines überzählig ist (Fig. 2.2.2). Ist $f: A \rightarrow B$ injektiv, so ist $f: A \rightarrow \text{im}(f)$ bijektiv, da nunmehr die Punkte $y \in B$, die nicht als Funktionswert vorkommen, außer Betracht fallen.

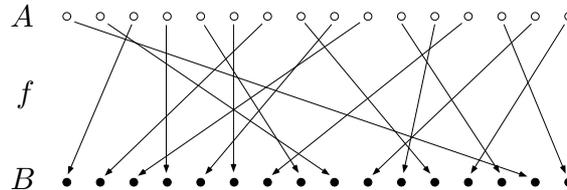


Fig. 2.2.2

Bsp: Die Funktionen $\tan:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ und $\tanh: \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$ (s.u.) sind bijektiv.

Exkurs über unendliche Mengen

Wenn wir sagen, eine gewisse Menge A besitze n Elemente, so meinen wir im Grunde genommen das folgende: Es gibt eine bijektive Abbildung der Menge $[1..n]$ auf A . Diese Vorstellung läßt sich auf unendliche Mengen ausdehnen. Es stellt sich dabei heraus, daß unendlich nicht einfach unendlich ist. Darüber soll hier kurz berichtet werden.

Eine Menge A heißt **abzählbar unendlich** oder einfach **abzählbar**, wenn es eine bijektive Abbildung $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ (oder umgekehrt) gibt. Beispiele von abzählbaren Mengen sind \mathbb{N} , \mathbb{Z} , die Menge der geraden Zahlen, die Menge der Primzahlen. Wie Cantor als erster bemerkt hat, ist auch $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und damit \mathbb{Q} (als Menge von Paaren (p, q)) abzählbar. Zum Beweis genügt es, eine injektive Abbildung $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ anzugeben. Hier ist sie:

$$f(p, q) := 2^p \cdot 3^q .$$

Da die von f produzierten Zahlen eine echte Teilmenge von \mathbb{N} bilden, besitzt $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ "eher weniger" Elemente als \mathbb{N} (in Wirklichkeit sind es natürlich gleich viele).

Eine Menge A ist **überabzählbar**, wenn es keine surjektive Abbildung $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ gibt. Die einfachste überabzählbare Menge ist die Menge aller unendlichen 0-1-Folgen $\beta. = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots)$. Daß diese Menge ($=: \mathbb{B}^{\mathbb{N}}$) überabzählbar ist, läßt sich folgendermaßen einsehen:

┌ Wäre $\mathbb{B}^{\mathbb{N}}$ abzählbar, so könnte man sich einen Computer vorstellen, der die *sämtlichen* Binärfolgen in unendlich langen Zeilen nacheinander ausdruckt:

```

01011010100110011110 ...
00010011100101010110 ...
10101000110001100001 ...
00000110000011001010 ...
11011110110001101011 ...
10001101111111001100 ...
01011001101110001 ...
⋮

```

Während der Computer an der Arbeit ist, betrachten wir die Hauptdiagonale der entstehenden Matrix $[\beta_{jk}]$ und bilden eine besondere Folge β_k^* gemäß der Vorschrift

$$\beta_k^* := \begin{cases} 1 & (\beta_{k.k} = 0) \\ 0 & (\beta_{k.k} = 1) \end{cases},$$

in dem obigen Beispiel also die Folge

$$\beta_k^* := (1101001 \dots).$$

Diese Folge wird vom Computer nicht produziert, denn sie unterscheidet sich von jeder ausgedruckten Folge an wenigstens einer Stelle. ┘

Faßt man die Binärfolgen als unendliche Dualbrüche $\beta_0.\beta_1\beta_2\dots$ auf, so erhält man gerade die sämtlichen reellen Zahlen im Intervall $[0, 2]$, die allermeisten genau ein Mal. Damit ist auch \mathbb{R} überabzählbar.

Umkehrfunktion

Eine bijektive Funktion (Abbildung)

$$f: \text{dom}(f) \rightarrow \text{im}(f), \quad x \mapsto y := f(x)$$

besitzt eine wohlbestimmte und ebenfalls bijektive **Umkehrfunktion**, auch **inverse Abbildung** genannt, und zwar ist

$$f^{-1}: \text{im}(f) \rightarrow \text{dom}(f)$$

(Fig. 2.2.3) definiert durch

$$f^{-1}(y) := \text{“das } x \in \text{dom}(f) \text{ mit } f(x) = y \text{”}.$$

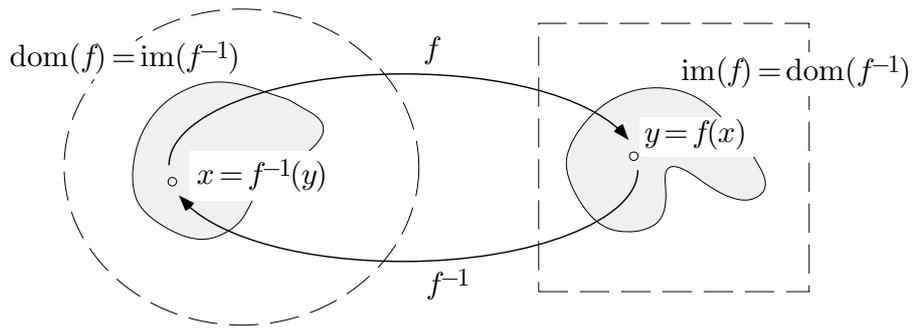


Fig. 2.2.3

Liegt f als Funktionsterm vor, so erhält man den Funktionsterm für f^{-1} , wenn es gelingt, die Gleichung $f(x) = y$ für unbestimmtes y formelmäßig nach x aufzulösen.

② Es sei

$$f(x) := \frac{3x + 7}{5x - 2},$$

wobei wir uns um den genauen Definitionsbereich im Augenblick nicht kümmern. Die folgende Kette von Gleichungen liefert den Funktionsterm für f^{-1} :

$$y = \frac{3x + 7}{5x - 2} \Rightarrow (5x - 2)y = 3x + 7 \Rightarrow x(5y - 3) = 2y + 7 \Rightarrow x = \frac{2y + 7}{5y - 3} \Rightarrow \underline{f^{-1}(y) = \frac{2y + 7}{5y - 3}}.$$

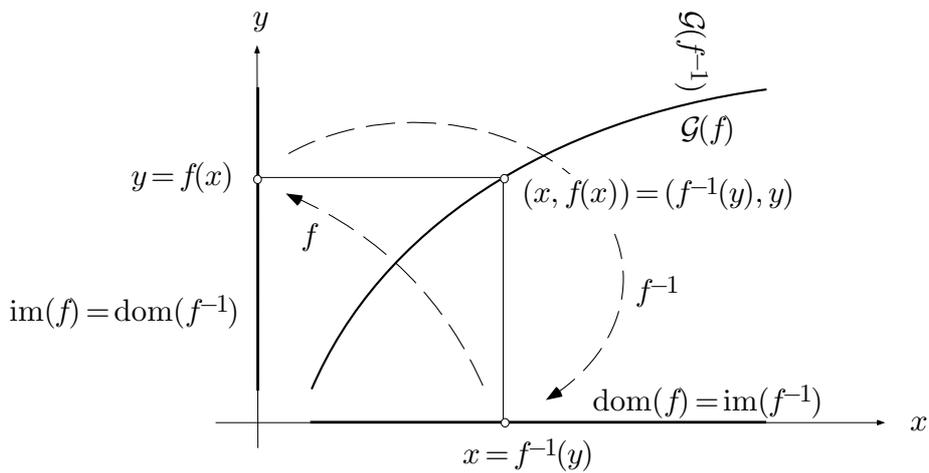


Fig. 2.2.4

Fig. 2.2.4 zeigt f und f^{-1} im Graphenbild. Der Graph von f kann also auch als Graph von f^{-1} dienen; dabei muß man nur den Kopf so halten, wie Fig. 2.2.5 zeigt.

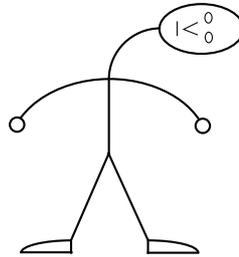


Fig. 2.2.5

Anmerkung: Werden f und f^{-1} gleichzeitig betrachtet, so behält man mit Vorteil x als Variable in $\text{dom}(f) = \text{im}(f^{-1})$ und y als Variable in $\text{im}(f) = \text{dom}(f^{-1})$ bei; insbesondere ist dann y die unabhängige Variable von f^{-1} . Interessiert das f nicht mehr, so kann man den Graphen von f^{-1} in die übliche Position bringen, d.h. f^{-1} als Funktion einer neuen, horizontal skalierten Variablen x darstellen.

Die Umkehrfunktion “existiert” unter den angeführten Umständen, auch wenn es nicht möglich ist, sie formelmäßig mit Hilfe von “schon vorhandenen” Funktionen darzustellen. Viele wichtige Funktionen, zum Beispiel die Arcus-Funktionen und letzten Endes auch \arg , sind ausdrücklich als Umkehrfunktionen von anderen Funktionen definiert und zunächst nicht anderweitig darstellbar.

③ Es sei $n \geq 1$. Die Potenzfunktion

$$\text{pot}_n: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \mapsto y := x^n$$

ist injektiv: Aus $0 \leq x' < x$ folgt

$$x^n - x'^n = (x^{n-1} + x^{n-2}x' + \dots + x'^{n-1})(x - x') > 0,$$

insbesondere $x^n \neq x'^n$. Ferner ist pot_n auch surjektiv (wird später bewiesen). Es gibt daher eine Umkehrfunktion, genannt **n -te Wurzel**:

$$\text{wrz}_n: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad y \mapsto x := \text{wrz}_n(y).$$

Anstelle von $\text{wrz}_n(y)$ schreibt natürlich jedermann $\sqrt[n]{y}$. ○

Viele wichtige Funktionen, zum Beispiel die trigonometrischen Funktionen, sind leider nicht injektiv. Um die Existenz einer Umkehrfunktion wenigstens für einen “Teil” von f auch in diesem Fall zu erzwingen, kann man den Definitionsbereich so weit verkleinern, daß f auf dem verkleinerten Bereich injektiv wird. Man wählt also eine geeignete Teilmenge $A \subset \text{dom}(f)$ und “vergißt” die Funktion außerhalb A . Diese **Einschränkung** von f auf A wird, wenn wirklich nötig, mit $f \upharpoonright A$ bezeichnet. Wir behandeln als Anwendung dieser Idee die Arcus-Funktionen.

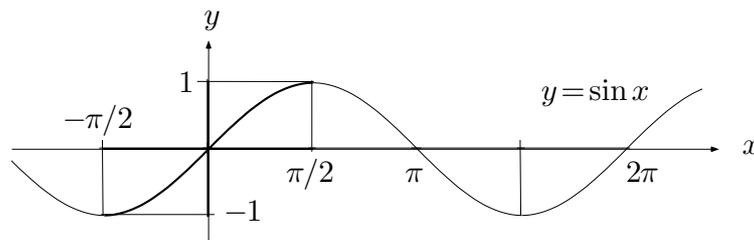


Fig. 2.2.6a

④ Die Einschränkung $\sin \upharpoonright [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ist streng monoton wachsend und bildet das Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ bijektiv auf $[-1, 1]$ ab (Fig. 2.2.6a). Es gibt daher die Umkehrfunktion

$$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

genannt **Arcussinus** (Fig. 2.2.6b).

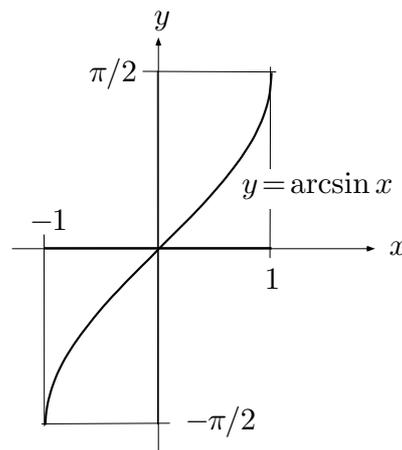


Fig. 2.2.6b

Die Einschränkung $\cos \upharpoonright [0, \pi]$ ist streng monoton fallend und bildet das Intervall $[0, \pi]$ bijektiv und gegenseitig auf das Intervall $[-1, 1]$ ab (Fig. 2.2.7). Es gibt daher die Umkehrfunktion **Arcuscosinus**:

$$\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi],$$

die monoton von π nach 0 fällt.

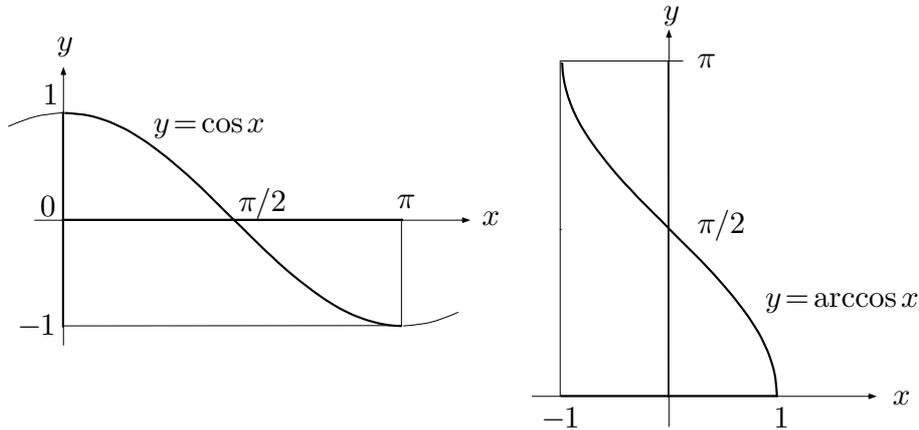


Fig. 2.2.7

Die Einschränkung $\tan \upharpoonright]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ist streng monoton wachsend und bildet das Intervall $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ bijektiv auf \mathbb{R} ab (Fig. 2.2.8). Es gibt daher die Umkehrfunktion **Arcustangens**:

$$\arctan: \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

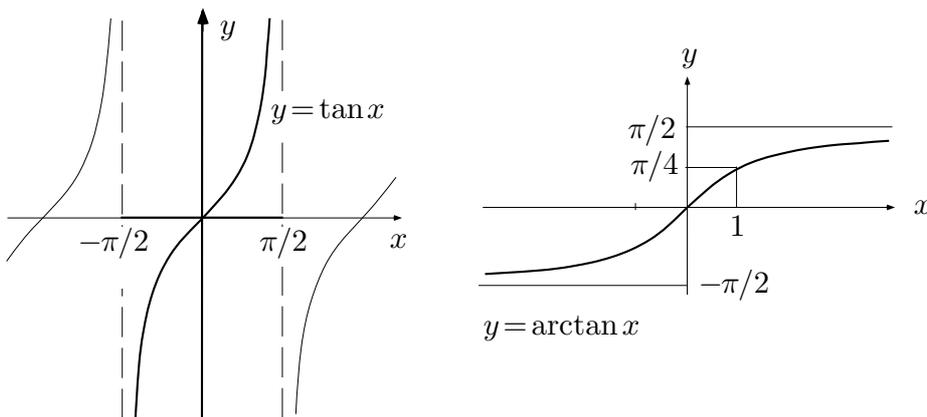


Fig. 2.2.8

Verknüpfungen von Funktionen

Sind f und g Funktionen mit gemeinsamem Definitionsbereich (eine beliebige Menge) und Werten in der gleichen Grundstruktur, zum Beispiel in \mathbb{C} , so lassen sich f und g ebenfalls den in \mathbb{C} vorhandenen Operationen und Verknüpfungen unterwerfen. Damit sind in natürlicher Weise die Funktionen

$$\bar{f}, |f|, \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f, f + g, \lambda f, f \cdot g, f/g$$

mit demselben Definitionsbereich erklärt — f/g natürlich nur in den Punkten x , wo $g(x) \neq 0$ ist.

Funktionen (Abbildungen) lassen sich aber noch auf eine weitere Art miteinander verknüpfen: Sind $f: A \rightarrow B$ und $g: B \rightarrow C$ zwei Funktionen, so ist für jedes $x \in A$ zunächst durch f der Punkt $f(x) \in B$ festgelegt und zu diesem dann durch g der Punkt $g(f(x)) \in C$ (Fig. 2.2.9). Damit entsteht von selbst die **zusammengesetzte Abbildung**

$$g \circ f: A \rightarrow C, \quad x \mapsto g(f(x)).$$

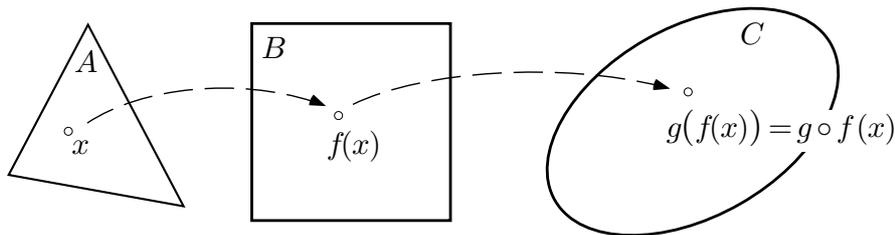


Fig. 2.2.9

⑤ Die beiden Funktionen

$$f(x) := e^x, \quad g(x) := \cos x$$

lassen sich als Abbildungen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} auffassen und somit auf zweierlei Arten zusammensetzen. Die beiden Zusammensetzungen

$$g \circ f: x \mapsto \cos(e^x), \quad f \circ g: x \mapsto e^{\cos x}$$

sind offensichtlich voneinander verschieden: $g \circ f$ nimmt Werte im Intervall $[-1, 1]$ an, $f \circ g$ im Intervall $[\frac{1}{e}, e]$. \bigcirc

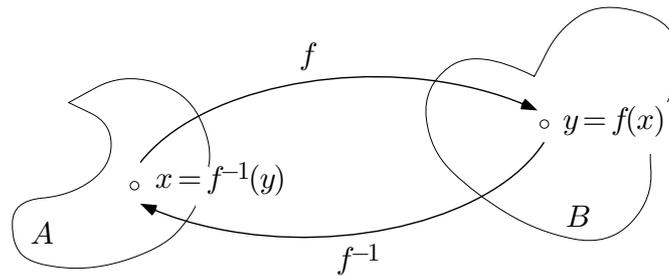


Fig. 2.2.10

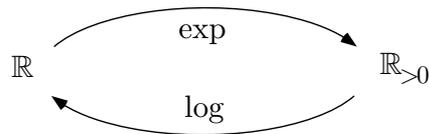


Fig. 2.2.11

⑥ Ist $f: A \rightarrow B$ bijektiv, so gilt

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_A, \quad f \circ f^{-1} = \text{id}_B$$

(Fig. 2.2.10); dabei bezeichnet

$$\text{id}_A: A \rightarrow A, \quad x \mapsto x$$

die **identische Abbildung** von A .

Bsp: Logarithmus und Exponentialfunktion (Fig. 2.2.11). Man hat

$$\forall t \in \mathbb{R}: \quad \log(e^t) = t;$$

$$\forall r \in \mathbb{R}_{>0}: \quad e^{\log r} = r.$$

○

⑦ Es seien

$$\gamma: \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \mathbf{x}(t)$$

die Parameterdarstellung einer Raumkurve (als “Flugplan” zu interpretieren) und

$$u: \mathbb{R}^3 \curvearrowright \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \mapsto u(\mathbf{x})$$

eine Temperaturverteilung im Raum. Dann stellt die Zusammensetzung

$$f(t) := u(\mathbf{x}(t))$$

den vom mitfliegenden Beobachter aufgezeichneten zeitlichen Temperaturverlauf dar.

○

Stetigkeit

Theoretisch betrachten wir die Punkte (Zahlen, Vektoren) unserer Grundstrukturen als ideale Objekte, die mit “unendlicher Genauigkeit” erfaßt und manipuliert werden können. In einem Computer sind aber nur die allerwenigsten Zahlen, zum Beispiel die Zahlen

$$\pm p/q \quad (p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}_{\geq 1}; p, q \leq 2^{48})$$

exakt darstellbar, alle anderen können nur mit ziemlicher Genauigkeit approximiert werden. Wenn wir unter diesen Umständen sinnvoll mit Funktionen arbeiten wollen (Fig. 2.2.12), sind wir darauf angewiesen, daß die Eingabe eines Näherungswerts x anstelle des richtigen Werts x_0 (man denke an $x_0 := \pi$) zu einem Funktionswert $f(x)$ führt, der in der Nähe des richtigen Funktionswerts $f(x_0)$ liegt. Es soll also gelten:

$$x \doteq x_0 \implies f(x) \doteq f(x_0) .$$

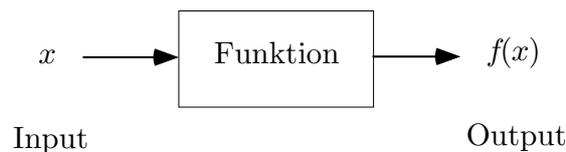


Fig. 2.2.12

Die hier angesprochene Eigenschaft von Funktionen ist die sogenannte *Stetigkeit*. Wie wir noch sehen werden, handelt sich da um einen fundamentalen Begriff der Analysis. In der beschriebenen Situation wäre man wohl zufrieden, wenn folgendes sichergestellt wäre:

$$\forall x : |f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| ,$$

das heißt, wenn der Fehler im Output höchstens so groß ist wie der Fehler im Input. Ja, es würde auch genügen, wenn für eine geeignete Konstante $C > 0$ (zum Beispiel $C := 20$) die Fehlerabschätzung

$$\forall x : |f(x) - f(x_0)| \leq C |x - x_0| \tag{1}$$

gilt. Läßt sich der Fehler im Funktionswert durch eine derartige **Lipschitz-Bedingung** begrenzen, so heißt f **lipstetig** (sic!) an der Stelle x_0 . Leider läßt sich die Stetigkeit mit diesem einfachen Ansatz nicht ganz in den Griff bekommen, wie das folgende Beispiel zeigt.

⑧ Die Wurzelfunktion

$$\sqrt{\cdot}: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \mapsto \sqrt{x}$$

ist zweifellos stetig, und zwar auch im Ursprung: Je näher x bei 0 ist, desto näher ist auch \sqrt{x} bei $\sqrt{0} = 0$. Wegen

$$\frac{|\sqrt{x} - \sqrt{0}|}{|x - 0|} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow 0+)$$

gibt es aber kein $C > 0$, so daß für alle $x \geq 0$ die Fehlerbegrenzung

$$|\sqrt{x} - \sqrt{0}| \leq C|x - 0|$$

garantiert ist.

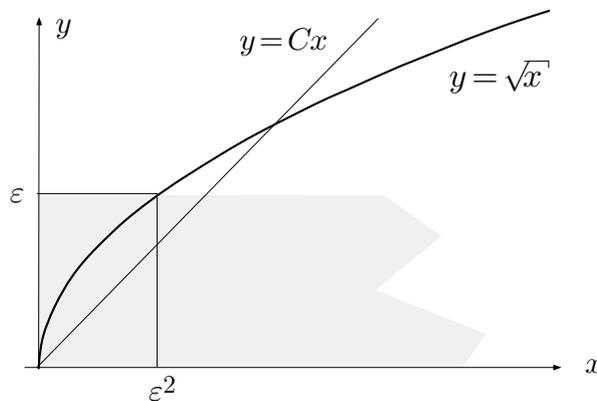


Fig. 2.2.13

Folgendes trifft hingegen zu (Fig. 2.2.13): Ist eine (beliebig kleine) Toleranz $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so läßt sich $|\sqrt{x} - \sqrt{0}| < \varepsilon$ erzwingen, indem man x hinreichend nahe bei 0 wählt: Es genügt, daß $|x - 0| < \varepsilon^2$ ist. \bigcirc

Diese eigentümlich verschachtelte Bedingung liegt der allgemeinen Definition der Stetigkeit zugrunde: Die Funktion f ist **an der Stelle** x_0 **stetig**, wenn sich zu noch so kleiner Toleranz $\varepsilon > 0$ ein “Schlupf” $\delta > 0$ angeben läßt, so daß für alle $x \in \text{dom}(f)$ gilt:

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Der Schlupf δ wird in aller Regel von ε abhängen: Je kleiner die Fehlertoleranz beim Funktionswert ist, desto weniger Schlupf darf die unabhängige

Variable aufweisen. — Eine Funktion f heißt ganz einfach **stetig**, wenn sie an jeder Stelle $x_0 \in \text{dom}(f)$ stetig ist.

Erfreulicherweise benötigen wir diese allgemeine Definition kaum; denn in den allermeisten Fällen ist eine Lipschitz-Bedingung (1) erfüllt, und das reicht für die Stetigkeit aus: Gilt (1) für ein gewisses C und ist eine Toleranz $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so ist $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ garantiert, sobald $|x - x_0| < \varepsilon/C$ ist. Folglich ist $\delta := \varepsilon/C$ ein zulässiger Schlupf.

Alles, was hier gesagt wird, gilt nicht nur für Funktionen $f: \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$, sondern für Funktionen, die in einer beliebigen Grundstruktur

$$\mathbb{X} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots, \mathbb{C}\}$$

definiert sind und in einer derartigen Struktur \mathbb{X}' Werte annehmen. In allen diesen Strukturen ist eine natürliche Abstandsmessung

$$d(x, a) := |x - a|$$

vorhanden, und etwas anderes haben wir bei der Definition der Stetigkeit nicht gebraucht. Anstelle dieses **euklidischen Abstandes** verwendet man gelegentlich auch die Abstandsfunktion

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| := \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - a_k| \quad (\mathbf{x}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n).$$

Die “Einheitskugel” ist dann ein achsenparalleler Würfel der Kantenlänge 2. Wie man sich leicht überlegt, gilt

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{a}| \leq \sqrt{n} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|.$$

Die beiden Abstandsmessungen unterscheiden sich also höchstens um den Faktor \sqrt{n} . Für Konvergenz- und Stetigkeitsbetrachtungen spielt es daher keine Rolle, ob man mit dem euklidischen Betrag $|\mathbf{x}|$ oder mit der “**Würfelnorm**” $\|\mathbf{x}\|$ arbeitet.

Wir notieren die folgenden Grundprinzipien:

- (2.2) (a) *Konstante Funktionen sind stetig.*
 (b) *Die identische Abbildung $x \mapsto x$ ist stetig.*
 (c) *Die Zusammensetzung von stetigen Funktionen ist stetig.*
 (d) *Die Umkehrfunktion einer injektiven stetigen Funktion $f: \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$ ist stetig.*

□ Wir beweisen nur (c), wobei wir die folgenden vereinfachenden Annahmen zugrundelegen: Die Funktion $f: x \mapsto y$ sei lipstetig an der Stelle x_0 :

$$\forall x: |f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0|,$$

und die Funktion $g: y \mapsto z$ sei lipstetig an der Stelle $y_0 := f(x_0)$:

$$\forall y: |g(y) - g(y_0)| \leq C'|y - y_0|.$$

Hieraus folgt: Für alle x gilt

$$\begin{aligned} |g \circ f(x) - g \circ f(x_0)| &= |g(f(x)) - g(f(x_0))| \\ &\leq C' |f(x) - f(x_0)| \\ &\leq C' C |x - x_0|; \end{aligned}$$

somit genügt $g \circ f$ an der Stelle x_0 einer Lipschitz-Bedingung mit der Konstanten $C' C$. (Das ist die ‘‘Kettenregel’’ für Lipstetigkeit!) \square

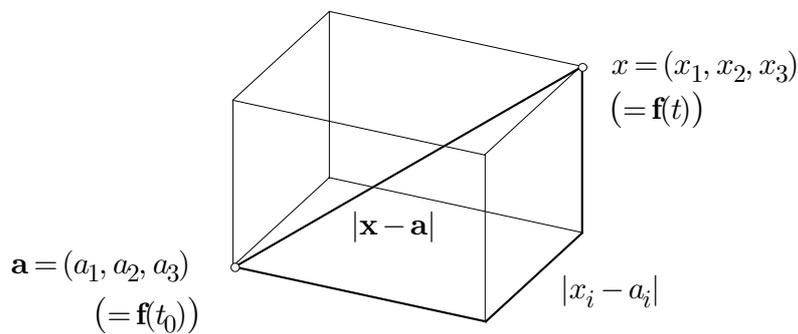


Fig. 2.2.14

Für zwei beliebige Punkte $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ und $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ im \mathbb{R}^3 gelten die Ungleichungen

$$|x_i - a_i| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{a}| \leq |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| + |x_3 - a_3| \quad (2)$$

(Fig. 2.2.14). Aus diesen Ungleichungen, bzw. den analogen Ungleichungen in den anderen Grundstrukturen, folgt:

(2.3) (a) *Die Projektionen*

$$\text{pr}_i: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \mapsto x_i$$

auf die Koordinatenachsen, insbesondere auch Re und Im , sind stetig.

(b) *Eine \mathbb{X} -wertige Funktion*

$$t \mapsto \mathbf{f}(t) \quad \left(= (f_1(t), f_2(t), f_3(t)), \text{ z.B.} \right)$$

ist genau dann stetig, wenn die einzelnen Koordinatenfunktionen f_i stetig sind.

□ (a) Die linke Ungleichung (2) besagt, daß pr_i lipstetig ist mit Lipschitz-Konstante 1. — (b) Ist \mathbf{f} stetig, so ist nach **(2.2)**(c) auch jedes $f_i = \text{pr}_i \circ \mathbf{f}$ stetig. Für die Hauptaussage von (b), daß nämlich die Stetigkeit der f_i die Stetigkeit des “Gesamtobjekts” \mathbf{f} nach sich zieht, verwenden wir die rechte Ungleichung (2) mit $\mathbf{x} := \mathbf{f}(t)$, $\mathbf{a} := \mathbf{f}(t_0)$. Wenn wir für die f_i vereinfachend (1) annehmen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} |\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)| &\leq \sum_{i=1}^3 |f_i(t) - f_i(t_0)| \leq \sum_{i=1}^3 C_i |t - t_0| \\ &= (C_1 + C_2 + C_3) |t - t_0|. \end{aligned}$$

Somit ist \mathbf{f} an der Stelle t_0 ebenfalls lipstetig, wobei $C := C_1 + C_2 + C_3$ als Lipschitz-Konstante dienen kann. □

Stetigkeit der Rechenoperationen

Für die analytische Praxis ist nun das folgende entscheidend:

(2.4) Die in den Grundstrukturen \mathbb{X} vorhandenen Operationen sind stetig.

□ Wir behandeln nur das Produkt von reellen Zahlen, das wir als eine Funktion $p(\cdot)$ der Vektorvariablen $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ betrachten:

$$p(\mathbf{x}) := x_1 \cdot x_2.$$

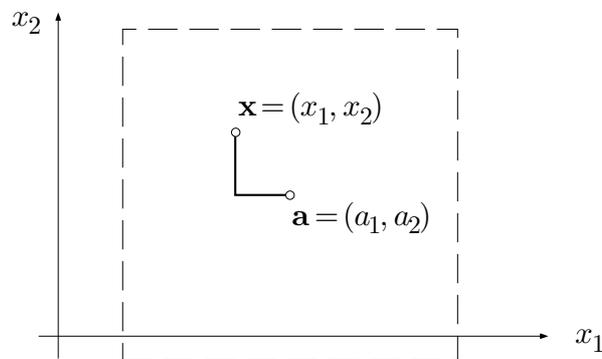


Fig. 2.2.15

Es genügt, die Stetigkeit von $p(\cdot)$ an einer fest gewählten Stelle $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ zu beweisen. Da wir dabei nur Produkte $x_1 \cdot x_2$ von Zahlen $x_1 \doteq a_1$ und $x_2 \doteq a_2$ betrachten müssen, dürfen wir von vorneherein

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq 1$$

annehmen (Fig. 2.2.15). Wir erhalten dann folgende Kette von Ungleichungen:

$$\begin{aligned}
 |p(\mathbf{x}) - p(\mathbf{a})| &= |x_1x_2 - a_1a_2| \\
 &= |(x_1 - a_1)a_2 + a_1(x_2 - a_2) + (x_1 - a_1)(x_2 - a_2)| \\
 &\leq |a_2| |x_1 - a_1| + |a_1| |x_2 - a_2| + |x_1 - a_1| |x_2 - a_2| \\
 &\leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| + \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 \\
 &\leq (2\|\mathbf{a}\| + 1) \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| ;
 \end{aligned}$$

somit ist $p(\cdot)$ lipstetig an der Stelle \mathbf{a} . ┘

Aus den Sätzen (2.2)–(2.4) folgt insbesondere

(2.5) *Ein mit stetigen Funktionen gebildeter rationaler Ausdruck ist, soweit definiert, stetig.*

┐ Wir können zum Beispiel das Produkt $g := f_1 \cdot f_2$ von zwei stetigen Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{X} \curvearrowright \mathbb{R}$ als Zusammensetzung $g = p \circ \mathbf{f}$ von stetigen Funktionen interpretieren:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{f} & & p \\
 \mathbb{X} \curvearrowright & \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\
 t \mapsto & (f_1(t), f_2(t)) & \mapsto f_1(t) \cdot f_2(t) \quad .
 \end{array}$$

Die erste Funktion ist stetig gemäß Prinzip (2.3)(b), die zweite nach Satz (2.4), die Zusammensetzung nach (2.2)(c). ┘

Wenn wir die Stetigkeit der Funktionen \exp , \cos , \sin einmal voraussetzen, ergibt sich hieraus weiter mit Satz (2.2)(d): Alle elementaren Funktionen sind in ihrem Definitionsbereich stetig.

⑨ Die Potenzfunktionen $\text{pot}_n: x \mapsto x^n$ sind als endliche Produkte von stetigen Funktionen $x \mapsto x$ stetig. Nach (2.2)(d) sind also auch die Wurzelfunktionen $\sqrt[n]{\cdot}$ stetig. — Die Funktion

$$f(x) := \frac{e^{1-\log^2 x} \arccos \frac{1}{1+x^2}}{\log \sin(1+e^x)}$$

ist, soweit definiert, stetig. ○

Zwischenwertsatz

Die Stetigkeit garantiert nicht nur, daß mit den betreffenden Funktionen in vernünftiger Weise numerisch gearbeitet werden kann, sondern sie bildet auch die Grundvoraussetzung für fundamentale Sätze der Analysis, so für den folgenden **Zwischenwertsatz**. Es leuchtet ein, daß ein derartiger Satz für Funktionen, die Sprünge machen, nicht gilt.

(2.6) Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und

$$f(a) < 0 < f(b) .$$

Dann besitzt f im Intervall $[a, b]$ wenigstens eine Nullstelle ξ .

□ Wir konstruieren durch fortgesetztes Halbieren des Intervalls $[a, b]$ rekursiv eine Folge von Intervallen $[a_k, b_k]$:

$$a_0 := a, \quad b_0 := b ;$$

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] := \begin{cases} \left[a_k, \frac{a_k + b_k}{2} \right], & \text{falls } f\left(\frac{a_k + b_k}{2}\right) > 0, \\ \left[\frac{a_k + b_k}{2}, b_k \right], & \text{falls } f\left(\frac{a_k + b_k}{2}\right) \leq 0. \end{cases}$$

Dann ist die Folge a_k monoton wachsend (Fig. 2.2.16), die Folge b_k monoton fallend, und es gilt für alle k :

$$b_k - a_k = \frac{1}{2^k}(b - a), \quad f(a_k) \leq 0 < f(b_k) .$$

Hieraus folgt mit Satz (1.1): Die beiden Folgen besitzen einen gemeinsamen Grenzwert ξ ; wir behaupten natürlich: Es ist $f(\xi) = 0$.

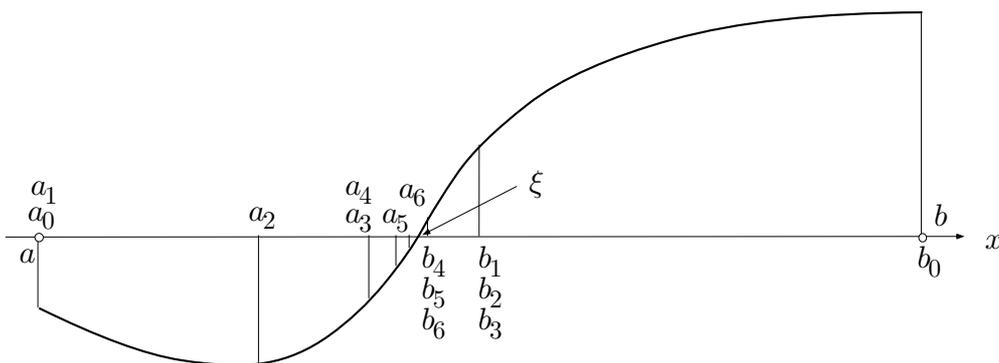


Fig. 2.2.16

Wir beweisen das indirekt und nehmen an, es sei etwa $f(\xi) =: 2\varepsilon > 0$. Da f an der Stelle ξ stetig ist, gibt es zu diesem ε einen Schlupf $\delta > 0$ mit

$$|x - \xi| < \delta \implies |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon.$$

Insbesondere ist dann $f(x) > \varepsilon > 0$ für alle $x \in]\xi - \delta, \xi]$. Da die a_k von unten gegen ξ konvergieren, gibt es bestimmt ein a_k in diesem Intervall (siehe die Fig. 2.2.17), und man hätte $f(a_k) > 0$ — ein Widerspruch. \square

Mit Hilfe des Zwischenwertsatzes läßt sich zum Beispiel leicht beweisen, daß die Potenzfunktionen $\text{pot}_n: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ surjektiv sind.

Die im Beweis von **(2.6)** angegebene Konstruktion einer Nullstelle ξ heißt **binäre Suche** und wird auch in der numerischen Praxis häufig verwendet. Wir behandeln dazu ein numerisches Beispiel.

⑩ Gegeben ist das Polynom dritten Grades

$$f(x) := x^3 - x - 1.$$

Es ist $f(0) = -1$, $f(2) = 5$. Wir legen dann die folgende Tabelle an:

a_k	b_k	$\frac{a_k + b_k}{2}$	$f\left(\frac{a_k + b_k}{2}\right)$
0	2	1	-1
1		1.5	0.875
	1.5	1.25	-0.2969
1.25		1.375	0.2246
	1.375	1.3125	-0.0515
1.3125		1.34375	0.0826
	1.34375	1.328125	0.014576
	1.328125	1.320313	-0.018711
1.320313		1.324219	-0.002128
1.324219		1.326172	0.006209
	1.326172	1.325195	0.002037
	1.325195	1.324707	-0.000047

Folglich besitzt f die Nullstelle $\xi \doteq 1.3247$. \circ

⑪ Ist $B \subset \mathbb{R}^2$ eine beschränkte konvexe Menge mit glattem Rand ∂B , so gibt es einen geradlinigen Schnitt, der sowohl den Flächeninhalt wie den Umfang von B halbiert.

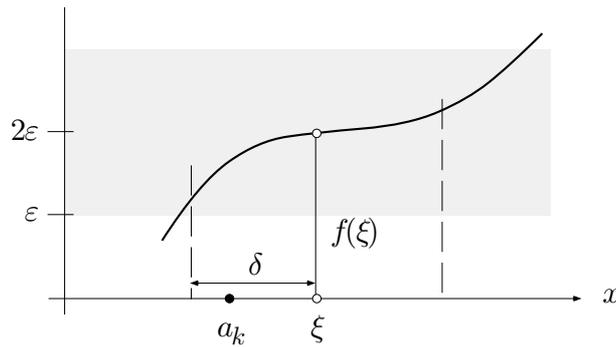


Fig. 2.2.17

□ Es bezeichne A den Flächeninhalt und L den Umfang von B . Wähle für ∂B eine Parameterdarstellung

$$\partial B : s \mapsto \mathbf{z}(s) \quad (0 \leq s \leq L)$$

mit der Bogenlänge als Parameter. Jeder geradlinige Schnitt durch zwei Punkte

$$\mathbf{z}(s), \quad \mathbf{z}\left(s + \frac{L}{2}\right) \quad \left(0 \leq s \leq \frac{L}{2}\right)$$

halbiert den Umfang. Es bezeichne $a(s)$ den Flächeninhalt zur Rechten eines derartigen Schnittes. Ist zum Beispiel $a(0) < \frac{A}{2}$, so ist $a\left(\frac{L}{2}\right) = A - a(0) > \frac{A}{2}$. Es gibt daher ein $s_0 \in \left[0, \frac{L}{2}\right]$ mit $a(s_0) = \frac{A}{2}$.

□
○

Aufgaben

1. Die Funktion

$$f : x \mapsto \sqrt{9 - \sqrt{25 - \sqrt{x}}}$$

wird als reellwertige Funktion der reellen Variablen x betrachtet.

- Bestimme den Definitionsbereich $\text{dom}(f) =: D$ sowie den Wertebereich $\text{im}(f) =: W$.
- Überlege: f ist Zusammensetzung von streng monotonen Funktionen und damit injektiv.
- Ⓜ Bestimme den analytischen Ausdruck der Umkehrfunktion

$$f^{-1} : W \rightarrow D.$$

- Ⓜ Zeichne die Graphen von f und von f^{-1} .

2. Produziere ein anregendes Beispiel von drei reellen Funktionen f, g, h , so daß für ein geeignetes Intervall I gilt:

$$h \circ g \circ f = \text{id}_I .$$

3. Es sei $\#A = 5, \#B = 8$. Bestimme
 (a) die Anzahl der injektiven Abbildungen $f : A \rightarrow B$,
 (b) die Anzahl der surjektiven Abbildungen $g : B \rightarrow A$.
 (*Hinweis:* Für (b) gibt es keine einfache Formel.)

4. (M) Es sei $f(x) := x^2 + 2x + 2$. Man bestimme, soweit möglich, die Umkehrfunktionen der Einschränkungen

$$(a) f \upharpoonright_{\mathbb{R}_{\geq 0}}, \quad (b) f \upharpoonright_{[-2, 0]}, \quad (c) f \upharpoonright_{\mathbb{R}_{\leq -2}} .$$

5. Zwei reelle Größen x und y sind durch die Beziehung

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y} = 2$$

aneinander gekoppelt. Ist diese Beziehung monoton? Welche Intervalle der x - und der y -Achse werden dadurch aufeinander abgebildet? Figur!

6. Erfinde eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$, die in jedem noch so kurzen Intervall jeden Wert $k \in \mathbb{N}$ annimmt.

7. Erfinde eine bijektive Abbildung von $\mathbb{R}_{\geq 0}$ auf $\mathbb{R}_{> 0}$.

8. (M) Die vier Teilflächen in der Figur 2.2.18 sind gleich groß. Bestimme den Winkel α mit Hilfe eines Taschenrechners und binärer Suche (eine Tabelle anlegen!). Wieviel Schritte wären nötig, um α auf 10^{-6} Grad genau zu berechnen?

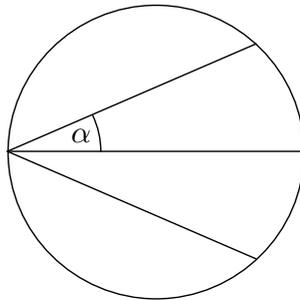


Fig. 2.2.18

9. (M) Man bestimme die Konstanten α und β sowie $f(-1), f(1)$ derart, daß die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x^2 - \alpha x + \beta & (x < -1) \\ (\alpha + \beta)x & (-1 < x < 1) \\ x^2 + \alpha x - \beta & (x > 1) \end{cases}$$

auf der ganzen reellen Achse stetig wird, und zeichne den resultierenden Graphen von f . (*Hinweis:* Diese Aufgabe kann von A bis Z mit \textcircled{M} gelöst werden.)

10. Eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **unimodal**, wenn sie bis zu einer bestimmten Stelle $\xi \in I$ streng monoton wächst und anschließend streng monoton fällt.

(a) Erfinde einen Suchalgorithmus für ξ ($I = [a, b]$ vorausgesetzt).

(b) Wende diesen Algorithmus an auf das Beispiel

$$f(t) := \sqrt{t} - e^t \quad (0 \leq t \leq 1).$$

11. Zeige: Ist $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf der Peripherie des Einheitskreises, so gibt es zwei Diametralpunkte auf S^1 , in denen f denselben Wert annimmt.

12. Verifiziere die folgenden Identitäten:

(a) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (0 \leq x \leq 1),$

(b) $\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1).$

2.3 Grenzwerte

Ist eine gegebene Funktion als stetig erwiesen, so ist man sicher, daß sie sich auf ihrem ganzen Definitionsbereich vernünftig verhält. Wenn wir aber das Verhalten einer Funktion in den Randzonen von $\text{dom}(f)$ oder in der Nähe von isolierten Ausnahmepunkten (Beispiel: $\sin x/x$ bei $x := 0$) beschreiben wollen, so benötigen wir den Begriff des *Grenzwerts*.

Einige Begriffe aus der allgemeinen Topologie

Bevor wir damit beginnen, erläutern wir einige Begriffe aus der sogenannten allgemeinen Topologie, dem Teilgebiet der Mathematik, das sich mit Stetigkeit "an sich", mit der Konvergenz in unendlichdimensionalen Räumen und mit Ähnlichem befaßt.

Es sei A eine beliebige Teilmenge des Grundraums \mathbb{X} , z.B. von \mathbb{C} . Ein Punkt $a \in A$ ist ein **innerer Punkt** von A , wenn es eine (u.U. kleine) Vollkugel mit Zentrum a gibt, die noch ganz zu A gehört (Fig. 2.3.1). Man kann dann von a aus in jeder Richtung noch ein Stück weit gehen, ohne A zu verlassen. Eine Menge A , die nur aus inneren Punkten besteht, heißt **offen**. Als Faustregel kann das folgende dienen: Eine durch endlich viele strenge Ungleichungen definierte Menge ist offen.

Bsp: Das offene Intervall $]0, 1[$ ist offen in \mathbb{R} , die Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ ist offen in \mathbb{C} , und $\{(x, y, z) \mid 0 < z < 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$ ist ein offener Kreiskegel im \mathbb{R}^3 .

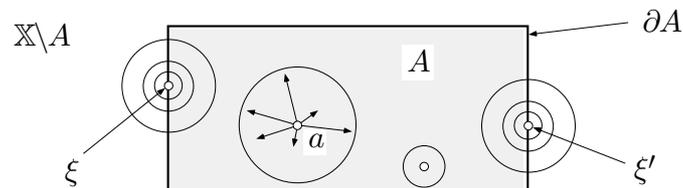


Fig. 2.3.1

Ein Punkt $\xi \in \mathbb{X}$, ob er nun zu A gehört oder nicht (Fig. 2.3.1), ist ein **Randpunkt** von A , wenn jede (noch so kleine) Vollkugel mit Mittelpunkt ξ sowohl die Menge A wie deren **Komplement** $\mathbb{X} \setminus A$ schneidet. Die Menge der Randpunkte von A wird mit ∂A bezeichnet. Die betrachtete Menge A heißt **abgeschlossen**, wenn $\partial A \subset A$ gilt, das heißt: wenn der Rand vollständig zu A dazugehört. Als Faustregel kann das folgende dienen: Eine durch Gleichungen und \leq -Ungleichungen definierte Menge $A \subset \mathbb{X}$ ist abgeschlossen.

Bsp: $\mathbb{R}_{\geq 0}$ und $[a, b]$ sind abgeschlossene Teilmengen von \mathbb{R} , die Ellipse $\{(x, y) \mid 2x^2 + 5y^2 \leq 7\}$ ist eine abgeschlossene Menge in der Ebene, und die x -Achse $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, z = 0\}$ ist eine abgeschlossene Menge im \mathbb{R}^3 .

Begriff des Grenzwerts

Wir betrachten also eine Funktion $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}'$ und konzentrieren unsere Aufmerksamkeit auf einen bestimmten Punkt $\xi \in \mathbb{X}$, typischer Weise einen Randpunkt von $\text{dom}(f)$. Da wir das Verhalten von f studieren wollen, wenn “ x nach ξ strebt”, nehmen wir von vorneherein an, daß es in beliebiger Nähe von ξ tatsächlich Punkte $x \in \text{dom}(f)$ gibt. Die Frage nach dem Verhalten von $f(x)$ für $x \rightarrow \xi$ führt auf die Frage: Könnte man den Wert $f(\xi)$ so definieren bzw. undefinieren, daß die durch $f(\xi) := \eta$ erweiterte bzw. abgeänderte Funktion f an der Stelle ξ stetig wird? Damit kommen wir auf die folgende Definition:

Die Funktion f besitzt an der Stelle ξ den **Grenzwert** η , in Zeichen:

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta \quad \text{bzw.} \quad f(x) \rightarrow \eta \quad (x \rightarrow \xi),$$

wenn sich für beliebig kleine Toleranz $\varepsilon > 0$ ein Schlupf $\delta > 0$ angeben läßt, so daß für alle $x \in \text{dom}(f)$ gilt (Fig. 2.3.2):

$$|x - \xi| < \delta, \quad x \neq \xi \quad \implies \quad |f(x) - \eta| < \varepsilon.$$

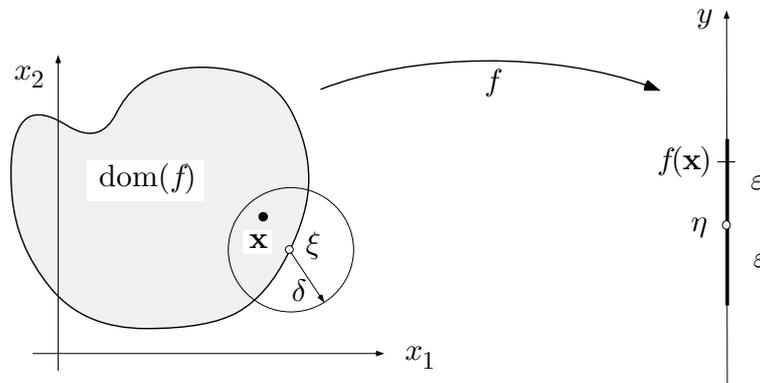


Fig. 2.3.2

Fig. 2.3.3 stellt diesen Sachverhalt im Graphenbild dar. Für jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$ muß der Graph von f innerhalb des schraffierten “ ε -Schlauches” verlaufen, sobald x nahe genug bei ξ liegt (aber $\neq \xi$ ist).

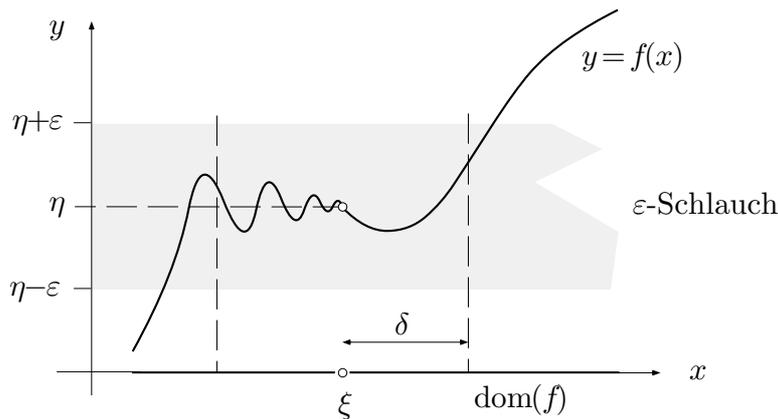


Fig. 2.3.3

Erfreulicherweise benötigen wir die allgemeine Definition des Grenzwerts nur selten. Zur tatsächlichen Berechnung von Grenzwerten bedienen wir uns in erster Linie eines Vorrats an “Standardgrenzwerten”,

$$\text{Bsp:} \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\exp z - 1}{z} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

sowie einer Sammlung von Rechenregeln und Tricks, zum Beispiel der Regel von Bernoulli-de l’Hôpital (s.u.).

Beachte, daß ein an der Stelle ξ eventuell schon vorhandener Funktionswert $f(\xi)$ beim Grenzübergang $x \rightarrow \xi$ nicht angeschaut wird. Ist tatsächlich $\xi \in \text{dom}(f)$, so kann man aber folgendes sagen:

$$f \text{ stetig an der Stelle } \xi \iff \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi).$$

Dies ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen.

① Die Funktion

$$f(t) := \frac{t^3 - 3t^2 - 3t + 10}{t^2 - 5t + 6}$$

ist an der Stelle $t := 2$ nicht definiert, da der Funktionsausdruck dort die Form $0/0$ annimmt. Nun gilt aber für alle $t \notin \{2, 3\}$:

$$f(t) = \frac{(t-2)(t^2 - t - 5)}{(t-2)(t-3)} = \frac{t^2 - t - 5}{t-3} =: g(t),$$

wobei nun die Funktion g an der Stelle 2 stetig ist. Somit folgt

$$\lim_{t \rightarrow 2} f(t) = \lim_{t \rightarrow 2} g(t) = g(2) = 3.$$

○

Uneigentliche Grenzlagen und Grenzwerte

Bevor wir auf die angekündigten Rechenregeln kommen, ergänzen wir die Grunddefinition durch einige Zusätze.

Die reelle Achse \mathbb{R} läßt sich durch die beiden **uneigentlichen Randpunkte** $-\infty$ und ∞ auf natürliche Weise “abschließen”. Diese beiden Punkte sind keine reellen Zahlen, mit denen man rechnen, sondern “bloß gedachte Objekte”, die man aber auf kohärente Weise in Grenzwertüberlegungen einbeziehen kann. Ist f eine Funktion, deren Definitionsbereich beliebig große reelle Zahlen enthält,

Bsp: $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$, $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$,

so hat es einen Sinn, nach dem Verhalten von $f(x)$ zu fragen, wenn “ x nach ∞ strebt”. Hierzu müssen wir den Sachverhalt “ x hinreichend nahe bei ∞ ” beschreiben, und dazu können wir offensichtlich keinen “Schlupf $\delta > 0$ ” brauchen. An seine Stelle tritt ein “Pflock” M wie folgt: Der Sachverhalt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \eta \quad \text{bzw.} \quad f(x) \rightarrow \eta \quad (x \rightarrow \infty)$$

liegt vor, wenn sich für jede noch so kleine Toleranz $\varepsilon > 0$ ein Pflock M so setzen läßt, daß gilt:

$$x > M \quad \implies \quad |f(x) - \eta| < \varepsilon .$$

In anderen Worten: Für jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$ muß der Graph von f innerhalb des “ ε -Schlauches” um den Wert η verlaufen, sobald x jenseits eines geeigneten Pflocks M liegt (Fig. 2.3.4). Je kleiner die vorgegebene Toleranz ist, desto weiter rechts wird man den Pflock einschlagen müssen.

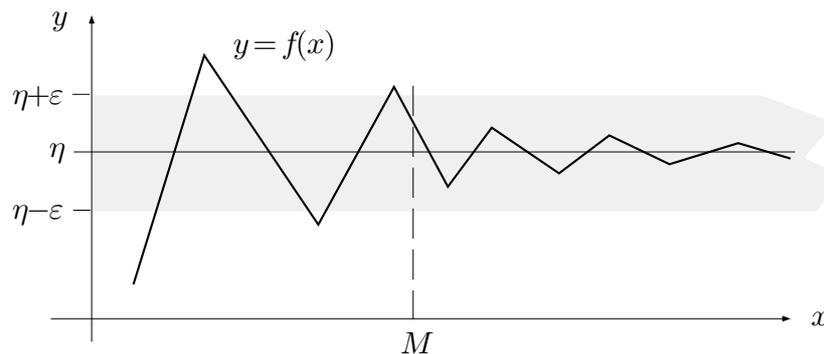


Fig. 2.3.4

② Ein “Standardgrenzwert” ist natürlich

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 .$$

Wir wollen das richtiggehend beweisen: Ist eine Toleranz $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so setzen wir den Pflock $M := 1/\varepsilon$ (Fig. 2.3.5). Für beliebiges $x > M$ gilt dann

$$0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{M} = \varepsilon ;$$

wir haben daher, wie verlangt:

$$x > M \quad \Longrightarrow \quad \left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon .$$

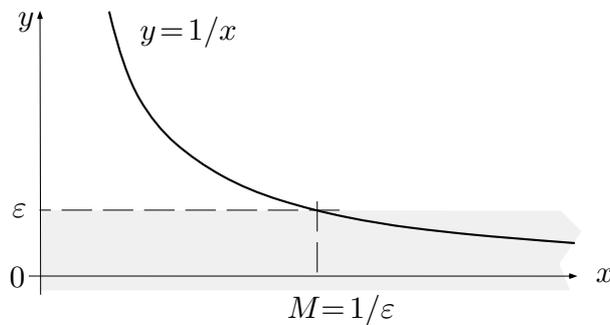


Fig. 2.3.5

Der $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$ existiert nicht, wie man ohne weiteres einer Figur entnimmt. Hingegen ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x} = 0 ,$$

denn es gilt (Fig. 2.3.6)

$$\left| \frac{\cos x}{x} \right| \leq \frac{1}{x} < \varepsilon ,$$

sobald $x > M := 1/\varepsilon$ ist.

Schon schwieriger ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2^x} = 0 .$$

Wir zeigen zunächst: Für alle $x \geq 0$ gilt

$$2^x > x . \tag{1}$$

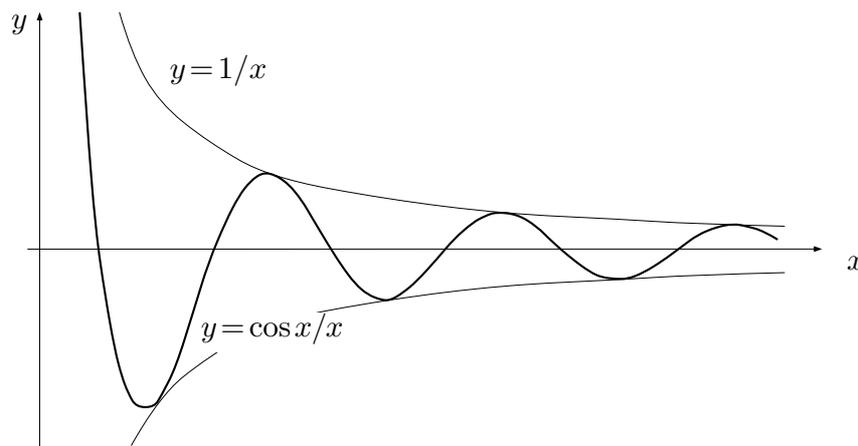


Fig. 2.3.6

□ Die Menge $[1..2^n]$ enthält insbesondere die $n+1$ Zahlen $1, 2, 4, \dots, 2^n$, und hieraus folgt schon $2^n \geq n+1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Setze jetzt $\lfloor x \rfloor =: n$; dann folgt

$$2^x \geq 2^n \geq n+1 > x,$$

wobei wir stillschweigend vorausgesetzt haben, daß die Funktion $x \mapsto 2^x$ monoton wächst. □

Hiernach gilt bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$:

$$0 < \frac{1}{2^x} < \frac{1}{x} < \varepsilon,$$

sobald $x > M := 1/\varepsilon$. ○

Wir haben hier den Grenzübergang $x \rightarrow \infty$ für die unabhängige Variable x betrachtet. Es ist aber auch möglich, wertseitig dem Sachverhalt

$$f(x) \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \xi)$$

einen Sinn zu erteilen. Es sei also $f: \mathbb{X} \curvearrowright \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion und ξ ein eigentlicher oder uneigentlicher Randpunkt von $\text{dom}(f)$. Wir sagen, f besitze an der Stelle ξ den **uneigentlichen Grenzwert** ∞ , in Zeichen:

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \infty \quad \text{bzw.} \quad f(x) \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \xi),$$

wenn sich für jede noch so große Schranke C ein Schlupf $\delta > 0$ (bzw. ein Pflock M) finden läßt, so daß für alle $x \in \text{dom}(f)$ gilt:

$$|x - \xi| < \delta, \quad x \neq \xi \quad (\text{bzw. } x > M) \quad \implies \quad f(x) > C.$$

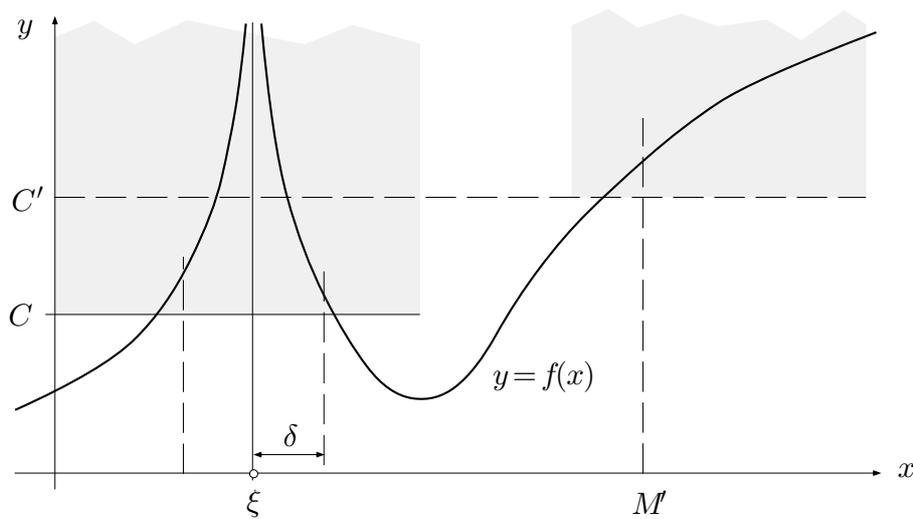


Fig. 2.3.7

Der Graph von f muß also für jedes noch so große C oberhalb des Niveaus C verlaufen, sobald x hinreichend nahe bei ξ (bzw. hinreichend weit rechts) liegt (Fig 2.3.7).

③ Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty .$$

Ist nämlich ein $C > 0$ vorgegeben und

$$0 < |x - 0| < \delta := \frac{1}{\sqrt{C}} ,$$

so folgt

$$\frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2} = C .$$

Wie erwartet, gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x = \infty .$$

Ist nämlich eine Schranke C vorgegeben, so folgt für alle $x > C$ ($=: M$) wegen (1) die Abschätzung

$$2^x > x > C .$$

○

Wir treffen hier die folgende Vereinbarung: Ist irgendwo ∞ oder $-\infty$ als Grenzwert zugelassen, so wird das an der betreffenden Stelle ausdrücklich gesagt. Ohne diesbezüglichen Hinweis wird unter “Konvergenz” immer Konvergenz gegen einen endlichen Wert η verstanden. Sinngemäß dasselbe gilt für Zahlfolgen (s.u.).

Einseitige Grenzwerte

Wir betrachten weiter für eine Funktion $f: \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{X}$ und einen festen Punkt $\xi \in \mathbb{R}$ den Grenzübergang $x \rightarrow \xi$, wobei aber nur die Funktionswerte $f(x)$ in Punkten $x > \xi$ berücksichtigt und die Funktionswerte links von ξ nicht dem Toleranztest unterzogen werden sollen (Fig. 2.3.8). Man schreibt dafür $x \rightarrow \xi+$ und nennt

$$\lim_{x \rightarrow \xi+} f(x) =: f(\xi+)$$

den **rechtsseitigen Grenzwert** von f an der Stelle ξ . Analog wird der **linksseitige Grenzwert** $f(\xi-)$ erklärt.

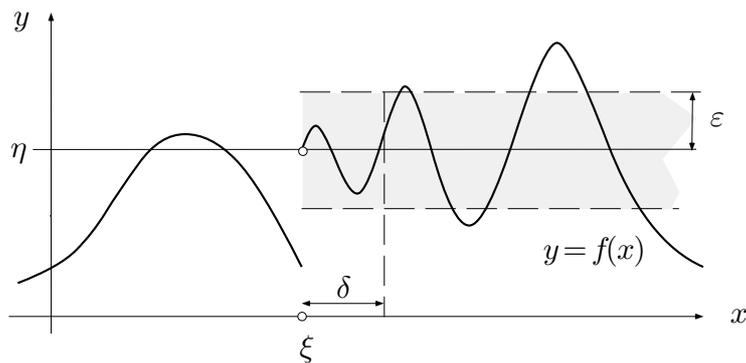


Fig. 2.3.8

Gilt $f(\xi+) = f(\xi)$, so ist f **rechtsseitig stetig** an der Stelle ξ . Gilt $f(\xi-) = f(\xi) = f(\xi+)$, so ist f an der Stelle ξ stetig, und umgekehrt. Existieren die einseitigen Grenzwerte $f(\xi+)$, $f(\xi-)$ und sind sie voneinander verschieden, so besitzt f an der Stelle ξ eine **Sprungstelle**. Eine bis auf isolierte Sprungstellen stetige Funktion heißt **stückweise stetig**.

④ Trivial ist

$$\operatorname{sgn}(0+) = 1, \quad \operatorname{sgn}(0-) = -1.$$

Ist $n \in \mathbb{Z}$, so gilt

$$\lim_{x \rightarrow n+} [x] = n \quad (= [n]), \quad \lim_{x \rightarrow n-} [x] = n - 1 \quad (\neq [n]),$$

und für alle $\xi \in \mathbb{Z}$ ist

$$\lim_{x \rightarrow \xi} [x] = [\xi] .$$

Die Funktion $x \mapsto [x]$ ist hiernach in den ganzzahligen Punkten nur rechtsseitig stetig, in allen übrigen Punkten stetig.

Weiter haben wir die “Standardgrenzwerte”

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty .$$

□ Es sei $C > 0$ eine beliebig große vorgegebene Schranke (Fig. 2.3.9) und $\delta := 1/C$. Dann gilt

$$0 < x < \delta \quad \implies \quad \frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} = C ,$$

wie verlangt. Ist zweitens $-\delta < x < 0$, so gilt $0 < -x < \delta$ und somit

$$\frac{1}{-x} > \frac{1}{\delta} = C .$$

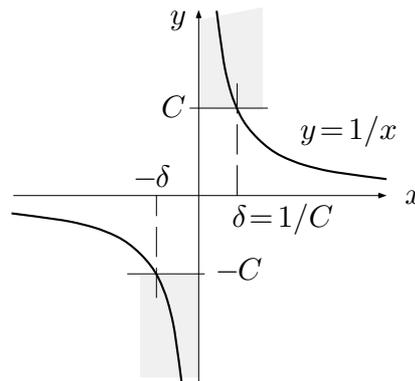


Fig. 2.3.9

In summa ergibt sich die erforderliche Implikation

$$-\delta < x < 0 \quad \implies \quad \frac{1}{x} < -C . \quad \lrcorner$$

Wir zeigen noch:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{1/x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{1/x} = 0 .$$

Wir haben es hier mit “ineinandergeschachtelten Grenzwerten” zu tun, wofür es eigentlich eine allgemeine Rechenregel gibt (s.u.). Die Idee ist: Strebt x

gegen $0+$, so strebt $y := 1/x$ gegen ∞ und folglich $2^{1/x} = 2^y$ auch gegen ∞ . Der exakte Beweis verläuft folgendermaßen:

□ Es sei eine Schranke $C > 0$ vorgegeben. Wegen $\lim_{y \rightarrow \infty} 2^y = \infty$ gibt es ein M mit

$$y > M \quad \implies \quad 2^y > C . \quad (2)$$

Wegen $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = \infty$ gibt es weiter ein $\delta > 0$ mit

$$0 < x < \delta \quad \implies \quad \frac{1}{x} > M . \quad (3)$$

Nehmen wir (2) und (3) zusammen, so folgt

$$0 < x < \delta \quad \implies \quad 2^{1/x} > C ,$$

wie verlangt. — Ähnlich schließt man im zweiten Fall. ┘

○

Substitutionsregel für zusammengesetzte Grenzwerte

Die eben verwendete Schlußweise läßt sich verallgemeinern zum Beweis des nachstehenden Satzes über zusammengesetzte (“ineinandergeschachtelte”) Grenzwerte. Man beachte die Analogie zum Satz **(2.2)**(c) über die Stetigkeit von zusammengesetzten Funktionen. Der Satz handelt vom Konvergieren “an sich”; die darin auftretenden Punkte ξ , η , ζ dürfen daher auch uneigentlich sein.

(2.7) Existieren die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta , \quad \lim_{y \rightarrow \eta} g(y) \quad (=:\zeta)$$

(und ist g stetig im Punkt η , falls f diesen Wert überhaupt annimmt), so gilt

$$\lim_{x \rightarrow \xi} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow \eta} g(y) .$$

In anderen Worten: Unter den angegebenen Voraussetzungen darf man in dem verschachtelten Ausdruck $\lim_{x \rightarrow \xi} g(f(x))$ die innere Funktion durch eine neue Variable y substituieren und y gegen den Grenzwert η der inneren Funktion streben lassen.

Anmerkung: Die in Klammern gesetzte Bedingung ist in den typischen Anwendungsfällen offensichtlich erfüllt, und wir verzichten darauf, sie jedesmal

zu überprüfen. Es geht aber nicht ohne, wie das folgende Beispiel zeigt: Es sei

$$f(x) := 1, \quad g(y) := \begin{cases} 2 & (y = 1) \\ 3 & (y \neq 1) \end{cases}.$$

Dann ist $g(f(x)) \equiv 2$ und folglich $\alpha := \lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = 2$. Hier strebt die innere Funktion mit $x \rightarrow 0$ gegen 1, was $\alpha = \lim_{y \rightarrow 1} g(y) = 3$ suggeriert.

⑤ Es ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 2^{1/t} = \lim_{y \rightarrow 0+} 2^y = 2^0 = 1;$$

dabei haben wir stillschweigend benutzt, daß $y \mapsto 2^y$ stetig ist. — Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \left(x \cos \frac{1}{x}\right) = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{y} \cos y\right) = 0,$$

und hieraus folgt weiter

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{4 + x \cos \frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{4 + t} = 2,$$

denn $\sqrt{\cdot}$ ist stetig. ○

Weitere Rechenregeln

(2.8) Es sei $\mathbf{f} := (f_1, f_2, \dots, f_n)$ ein n -Tupel von Funktionen, die in der Umgebung des (eigentlichen oder uneigentlichen) Punktes ξ definiert sind und für $x \rightarrow \xi$ Grenzwerte besitzen:

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f_i(x) = a_i \quad (1 \leq i \leq n).$$

Dann gilt:

(a)
$$\lim_{x \rightarrow \xi} \mathbf{f}(x) = \mathbf{a}.$$

(b) Ist $R(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ ein rationaler Ausdruck in den f_i und ist der Wert $R(a_1, a_2, \dots, a_n)$ definiert, so gilt

$$\lim_{x \rightarrow \xi} R(f_1(x), \dots, f_n(x)) = R(a_1, \dots, a_n).$$

Die Behauptung (b) besagt, daß man an jeder Stelle des Ausdrucks den betreffenden Grenzwert einsetzen darf. Ist $R(a_1, \dots, a_n)$ nicht definiert, etwa

von der Form $1/0$ oder $0/0$, so muß man weitere Überlegungen anstellen. Unter (b) lassen sich natürlich unzählige einfachere Grenzwertregeln subsumieren (die man sonst einzeln beweisen müßte).

Bsp: $\lim_{x \rightarrow \xi} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = a_1 \cdot a_2$.

□ (a) Aus der Ungleichung 2.2(2) folgt

$$|\mathbf{f}(x) - \mathbf{a}| \leq \sum_{i=1}^n |f_i(x) - a_i| .$$

Es sei eine Toleranz $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Ist x hinreichend nahe bei ξ , so ist jeder Summand rechter Hand $< \varepsilon/n$, also ist dann $|\mathbf{f}(x) - \mathbf{a}| < \varepsilon$.

(b) Nach Satz (2.5) ist die Funktion $\mathbf{y} \mapsto R(\mathbf{y})$ an der Stelle \mathbf{a} stetig. Mit (a) und (2.7) folgt daher

$$\lim_{x \rightarrow \xi} R(\mathbf{f}(x)) = \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{a}} R(\mathbf{y}) = R(\mathbf{a}) . \quad \square$$

Handlich ist das folgende **Vergleichskriterium**, womit wir unsere Regelkollektion abschließen:

(2.9) Gilt für eine geeignete Konstante $C > 0$ in der Umgebung des Punktes ξ die Abschätzung

$$|f(x)| \leq C \cdot g(x)$$

und ist $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = 0$, so ist auch $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = 0$.

□ Es sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach Voraussetzung über g gilt $g(x) < \varepsilon/C$ für alle hinreichend nahe bei ξ gelegenen x . Für diese x ist dann $|f(x) - 0| < \varepsilon$, wie verlangt. □

⑥ Zu berechnen ist die Größe

$$Q := \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{9 + 500 \cdot 2^{1/(x-1)} \cos \frac{1}{x-1}} + \frac{1}{\arcsin x} + e^x}{\frac{x^5 - 1}{x - 1} - \log(x^3 + x)} .$$

Es ist

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 2^{1/(x-1)} = \lim_{y \rightarrow 0^-} 2^{1/y} = 0 ,$$

ferner gilt:

$$\frac{x^5 - 1}{x - 1} = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \rightarrow 5 \quad (x \rightarrow 1) ,$$

da das Polynom rechter Hand an der Stelle 1 stetig ist. Wir erhalten daher mit Hilfe von (2.8)(b) und (2.9):

$$Q = \frac{3 + \frac{2}{\pi} + e}{5 - \log 2} = 1.4755 . \quad \bigcirc$$

① (Forts.) Die Ausgangsfunktion f besitzt an der Stelle $t := 2$ eine hebbare Unstetigkeit und ist für alle praktischen Zwecke identisch mit der Funktion

$$g(t) := \frac{t^2 - t - 5}{t - 3} = t + 2 + \frac{1}{t - 3} ,$$

wobei wir den Ausdruck rechter Hand durch Ausführung der Division (mit Rest) erhalten haben. Es ist $\text{dom}(g) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Um einen globalen Überblick über das Verhalten der Funktion g zu gewinnen, berechnen wir die Schnittpunkte des Graphen von g mit den Koordinatenachsen sowie die Grenzwerte in den Endpunkten der Definitionsintervalle (Fig. 2.3.10). Es ist

$$\begin{aligned} g(0) &= \frac{5}{3} ; \\ g(t) = 0 &\iff t^2 - t - 5 = 0 \iff t \in \left\{ \frac{1 + \sqrt{21}}{2}, \frac{1 - \sqrt{21}}{2} \right\} ; \\ \lim_{t \rightarrow 3^-} g(t) &= -\infty , & \lim_{t \rightarrow 3^+} g(t) &= \infty ; \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) &= -\infty , & \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) &= \infty , \end{aligned}$$

und zwar ist die Gerade $y = t + 2$ Asymptote (s.u.) des Graphen sowohl für $t \rightarrow -\infty$ wie für $t \rightarrow \infty$. (Der Graph ist eine Hyperbel.) \bigcirc

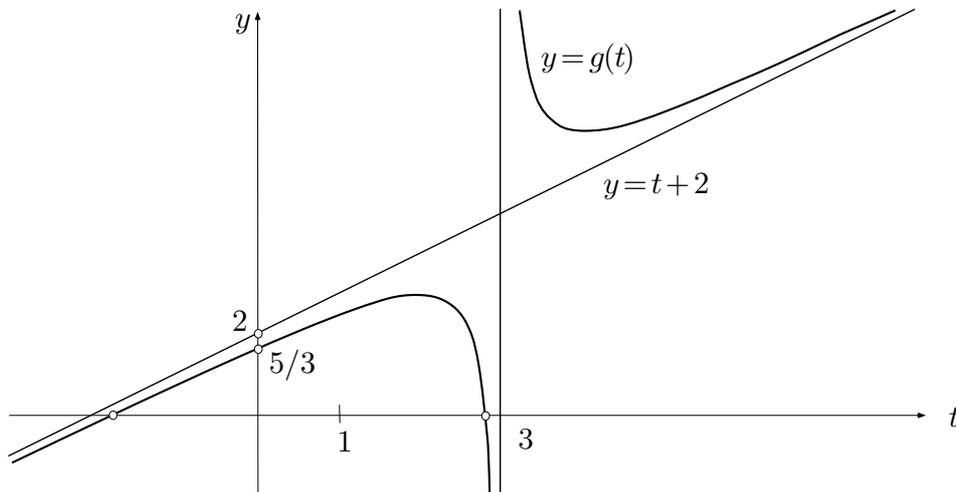


Fig. 2.3.10

Asymptoten

Die \mathbb{X} -wertige Funktion f sei für alle $t > a$ definiert. Die Gerade

$$y = pt + q, \quad p, q \in \mathbb{X} \text{ fest,}$$

heißt **Asymptote** von $\mathcal{G}(f)$ (Fig. 2.3.11) für $t \rightarrow \infty$, wenn

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (f(t) - (pt + q)) = 0$$

ist. Die Parameter p und q berechnen sich nach den Formeln

$$p = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t}, \quad q = \lim_{t \rightarrow \infty} (f(t) - pt).$$

Nicht jedes $f: \mathbb{R}_{>a} \rightarrow \mathbb{X}$ besitzt eine Asymptote! Für $f(t) := t + \sqrt{t}$ strebt $\frac{f(t)}{t}$ zwar gegen 1, aber $f(t) - t$ gegen ∞ .

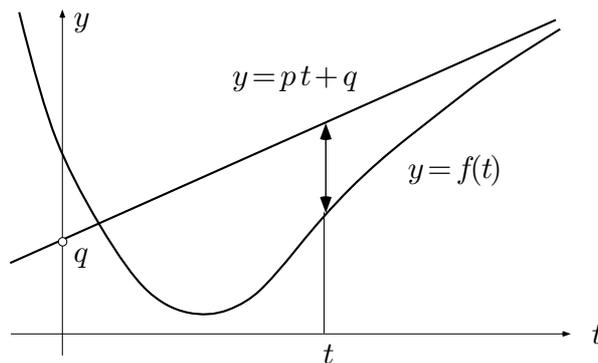


Fig. 2.3.11

Aufgaben

1. (M) Bestimme die folgenden Grenzwerte, falls vorhanden:

(a) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x^4 - 81},$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^p - 1}{x^q - 1} \quad (p, q \in \mathbb{N}^*),$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(\sqrt{x}),$

(d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{2x-1}{(\sqrt{x}+1)^3}\right),$

(e) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 14x + 24}{|x-2| + |x^2 - 4|},$

(f) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 14x + 24}{|x-2| + |x^2 - 4|},$

$$(g) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x(x+a)} - x \right), \quad (h) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-4)(n^2+1)}{7n(2n^2+10\,000)},$$

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), \quad (j) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \left(1 - \sqrt{1 - \frac{a}{n}} \right) \right).$$

2. (a) (M) Bestimme die Parameter α, β, γ so, daß die Differenz

$$\sqrt{t^4 - 2t^2 + 7t + 1} - (at^2 + \beta t + \gamma)$$

mit $t \rightarrow \infty$ gegen 0 strebt. (*Hinweis:* Mit der Summe der beiden erweitern.)

(b) (M) Stelle eine instruktive Figur der resultierenden Situation her.

3. Bei den folgenden Funktionen bestimme man, soweit vorhanden, die zu $t \rightarrow \infty$ gehörigen Asymptoten:

$$(a) \quad f(t) := \frac{t}{t + \sqrt{t}}, \quad (b) \quad g(t) := t \left(2 - \sin \frac{1}{t} \right).$$

2.4 Folgen und Reihen

Folgen als mathematisches Konstruktionswerkzeug

Im Grunde genommen können wir bis dahin nur *rationale* Zahlen und *rationale* Funktionen in rechtsgenügender Weise erfassen und manipulieren bzw. evaluieren. Quadratwurzeln, allgemein: n -te Wurzeln, sind zwar in \mathbb{R} vorhanden, und die Wurzelfunktionen sind auch stetig, aber wir haben kein systematisches Verfahren, das den Wurzelexponenten n und ein beliebiges $c \geq 0$ als Input akzeptiert und $\sqrt[n]{c}$ mit vorgeschriebener Genauigkeit ausgibt. Oder: Wie rechnet ein Taschenrechner $\sin 23.5^\circ$ aus?

Wir benötigen ein allgemeines Konstruktionswerkzeug für “analytische Objekte”, Zahlen oder Funktionen, und zwar in zweierlei Hinsicht:

- Erstens geht es darum, neuartige Objekte begrifflich zu konzipieren und formelmäßig darzustellen.

$$\text{Bsp: } e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} .$$

- Zweitens sollte man instandgesetzt werden, diese Objekte in endlich vielen Schritten mit jeder wünschbaren Genauigkeit (numerisch) zu berechnen.

Ein derartiges Konstruktionswerkzeug ist der Folgenbegriff und im Anschluß daran die Idee der “Reihe”.

Man kann den Definitionsbereich \mathbb{N} einer Folge

$$x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{X}, \quad k \mapsto x_k \tag{1}$$

als eine Teilmenge von \mathbb{R} mit dem uneigentlichen Randpunkt ∞ betrachten oder als einen Grundbereich *sui generis* — jedenfalls heißt die Folge (1) **konvergent** gegen den **Grenzwert** $\xi \in \mathbb{X}$, in Zeichen:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi \quad \text{bzw.} \quad x_k \rightarrow \xi \quad (k \rightarrow \infty),$$

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Pflock k_0 gibt mit

$$k > k_0 \quad \implies \quad |x_k - \xi| < \varepsilon .$$

Existiert kein derartiges $\xi \in \mathbb{X}$, so heißt die Folge (1) **divergent**. Hierunter fallen insbesondere die **uneigentlich konvergenten** Folgen, die sinngemäß erklärt sind.

Die Rechenregeln (2.8), (2.9) gelten natürlich auch für Folgenre Grenzwerte. So hat man zum Beispiel

$$\forall k: |x_k| \leq C \cdot r_k \quad \wedge \quad \lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 0 \quad \implies \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0 . \tag{2}$$

Satz (2.7) über zusammengesetzte Grenzwerte liefert umgekehrt das folgende wichtige Prinzip (Fig. 2.4.1):

(2.10) Ist $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta$ (bzw.: Ist f stetig an der Stelle ξ), so gilt für jede gegen ξ konvergente Punktfolge x in $\text{dom}(f)$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \eta \quad (\text{bzw. } \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(\xi)) .$$

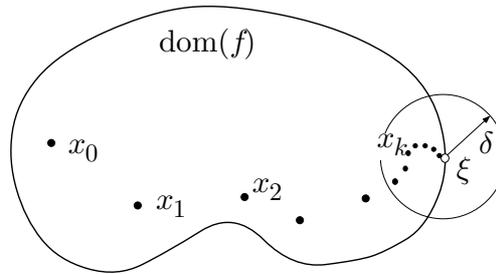


Fig. 2.4.1

①

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0 ;$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(3k-1)(k^2+5)}{(2k+7)^3} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(3-\frac{1}{k})(1+\frac{5}{k^2})}{(2+\frac{7}{k})^3} = \frac{3}{8} .$$

Betrachte weiter ein festes $q \in \mathbb{C}$. Wir behaupten: Ist $0 < |q| < 1$, so gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} q^k = 0 .$$

┌ Nach Voraussetzung ist $\frac{1}{|q|} > 1$, also $\frac{1}{|q|} = 1 + \delta$ für ein $\delta > 0$. Es folgt

$$\frac{1}{|q|^k} = (1 + \delta)^k = 1 + k\delta + \dots > k\delta$$

(binomischer Lehrsatz) und somit

$$|q^k| = |q|^k < \frac{1}{k\delta} .$$

Da hier die rechte Seite mit $k \rightarrow \infty$ gegen 0 strebt, folgt die Behauptung mit Hilfe des Vergleichskriteriums (2). ┌

○

In der Praxis tritt folgende Situation immer wieder auf: Gesucht ist der Grenzwert ξ einer Folge x_k , die in bestimmter Weise rekursiv definiert ist:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &:= a \\ x_{k+1} &:= x_k + \Delta x_k \end{aligned} \right\} \quad (k \geq 0) \quad ; \quad (3)$$

dabei ist es in der Regel so, daß das **Inkrement** Δx_k ohne großen Rechenaufwand berechnet werden kann. Die Rechnung wird abgebrochen, sobald die Inkremente vernachlässigbar klein werden, und man betrachtet das letzte berechnete x_k als Näherungswert für den gesuchten Grenzwert ξ .

Diese Situation liegt zum Beispiel vor beim Newtonschen Verfahren (s.u.) zur numerischen Berechnung von Nullstellen von Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Die Rekursionsformel hat hier folgende Gestalt:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{-f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (k \geq 0).$$

Unendliche Reihen

Den Begriff der Reihe können wir unter demselben Aspekt betrachten. Ist a_k eine beliebige Folge in einer Grundstruktur \mathbb{X} , so kann man versuchen, der "unendlichen Summe"

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad (4)$$

einen Sinn zu erteilen. Hierzu betrachtet man die Folge s_n der endlichen **Partialsommen**

$$s_n := \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

Die Folge s_n ist eine Folge der in (3) betrachteten Art: Offensichtlich gilt

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \quad (n \geq 0),$$

es ist also $\Delta s_n = a_{n+1}$.

Man nennt (4) eine (**unendliche**) **Reihe**. Die Reihe ist **konvergent**, wenn die Folge s_n der Partialsommen einen endlichen Grenzwert besitzt. Der Ausdruck (4) bezeichnet dann auch diesen Grenzwert oder eben die **Summe** der Reihe.

② Es sei $q \in \mathbb{C}$ fest, $|q| < 1$. Dann gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1-q}$$

(**geometrische Reihe**).

□ Aus

$$s_n(1-q) = (1+q+q^2+\dots+q^n)(1-q) = 1-q^{n+1}$$

(alles andere hebt sich heraus) folgt

$$s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

und somit wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0$ die Behauptung. □

Die **harmonische Reihe**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

ist divergent, obwohl die Summanden mit $k \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergieren. Es gilt nämlich

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Wegen $s_{2^0} = s_1 = 1$ folgt hieraus

$$s_{2^r} \geq 1 + \frac{r}{2}$$

und damit $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$.

Die **alternierende harmonische Reihe**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

ist hingegen konvergent und besitzt die Summe $\log 2$ (s.u.). ○

Ist c eine Folge von positiven Zahlen, die monoton fallend gegen 0 konvergiert, so heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k = c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + \dots$$

eine **alternierende Reihe**. Hierüber gilt der folgende Satz:

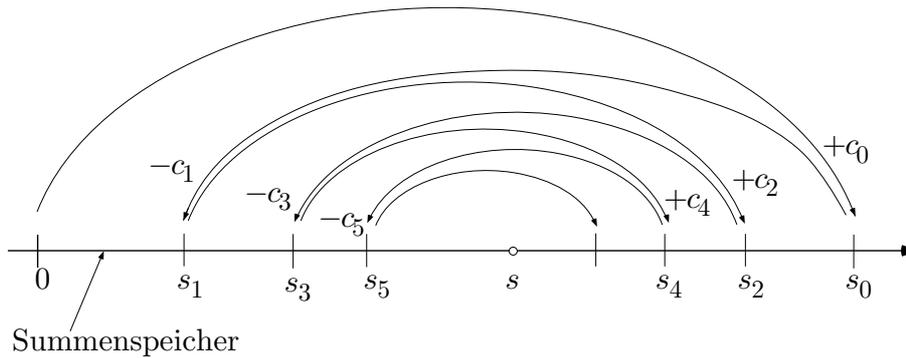


Fig. 2.4.2

(2.11) *Alternierende Reihen sind konvergent. Ist s die Summe einer derartigen Reihe, so gilt für jedes n eine Fehlerabschätzung der Form*

$$s - s_n = (-1)^{n+1} \Theta c_{n+1}, \quad 0 < \Theta < 1. \quad (5)$$

In Worten: Der Abbrechfehler ist ein echter Bruchteil des ersten vernachlässigten Gliedes.

□ Da die c_k monoton abnehmen, bilden die “ungeraden” Partialsummen eine monoton wachsende und die “geraden” Partialsummen eine monoton fallende Folge (Fig. 2.4.2). Diese zwei Folgen sind nach Satz (1.1) konvergent, und wegen $c_k \rightarrow 0$ müssen die beiden Grenzwerte übereinstimmen. Die Abschätzung (5) entnimmt man ebenfalls der Fig. 2.4.2. ┘

Die alternierende harmonische Reihe konvergiert nur, weil sich die positiven und die negativen Glieder ungefähr die Waage halten. Um damit $\log 2$ auf drei Stellen genau zu berechnen, müßte man 2000 Glieder berücksichtigen:

$$\sum_{k=1}^{2000} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 0.692897, \quad \log 2 = 0.693147.$$

Absolut konvergente Reihen

In der “praktischen Analysis” ist die Konvergenz einer Reihe (4) erst dann brauchbar, wenn die a_k betragsmäßig so rasch abnehmen, daß die zu (4) gehörige Betragsreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|,$$

konvergiert. (Der Summenwert der Betragsreihe interessiert an sich nicht; es geht nur darum, daß er endlich ist.) Die Ausgangsreihe heißt in diesem Fall

absolut konvergent. Absolut konvergente Reihen sind tatsächlich konvergent (ohne Beweis) und dürfen mehr oder weniger wie endliche Summen behandelt werden. Insbesondere darf man zwei derartige Reihen distributiv miteinander multiplizieren und die entstehenden “ ∞^2 ” Glieder (allenfalls zu “Paketen” zusammengefaßt) in irgendeiner Reihenfolge aufsummieren. Das heißt: Es gilt

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{(i,k) \in \mathbb{N}^2} a_i b_k .$$

Wir geben nun zwei Kriterien für absolute Konvergenz:

(2.12) Gibt es ein $C > 0$, ein $q < 1$ und ein k_0 mit

$$|a_k| \leq C q^k \quad \forall k > k_0 , \quad (6)$$

so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

□ Nach allfälliger Vergrößerung von C dürfen wir annehmen, daß (6) für alle k gilt. Die Partialsummen

$$s_n := \sum_{k=0}^n |a_k|$$

der zu $\sum a_k$ gehörigen Betragsreihe bilden eine monoton wachsende und wegen

$$s_n \leq \sum_{k=0}^n C q^k \leq \frac{C}{1-q}$$

beschränkte Folge. ┘

③ Betrachte für ein festes $\phi \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$S := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(k\phi)}{2^k} . \quad (7)$$

Diese Reihe ist wegen

$$\left| \frac{\cos(k\phi)}{2^k} \right| \leq \left(\frac{1}{2} \right)^k$$

absolut konvergent. Ihre Summe läßt sich folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned} S &= \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{ik\phi}}{2^k} = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{e^{i\phi}}{2} \right)^k = \operatorname{Re} \frac{1}{1 - e^{i\phi}/2} \\ &= \operatorname{Re} \frac{1 - e^{-i\phi}/2}{(1 - e^{i\phi}/2)(1 - e^{-i\phi}/2)} = \frac{1 - \frac{1}{2} \cos \phi}{1 - \cos \phi + \frac{1}{4}} = \frac{4 - 2 \cos \phi}{5 - 4 \cos \phi} . \end{aligned}$$

Sehen wir nachträglich ϕ als variabel an, so können wir dieses Ergebnis folgendermaßen interpretieren: Die Reihe (7) stellt die 2π -periodische Funktion

$$f(\phi) := \frac{4 - 2 \cos \phi}{5 - 4 \cos \phi}$$

(Fig. 2.4.3) als Summe von reinen Cosinus-Schwingungen ganzzahliger Kreisfrequenzen k dar. (7) ist die sogenannte *Fourier-Reihe* von f . \circ

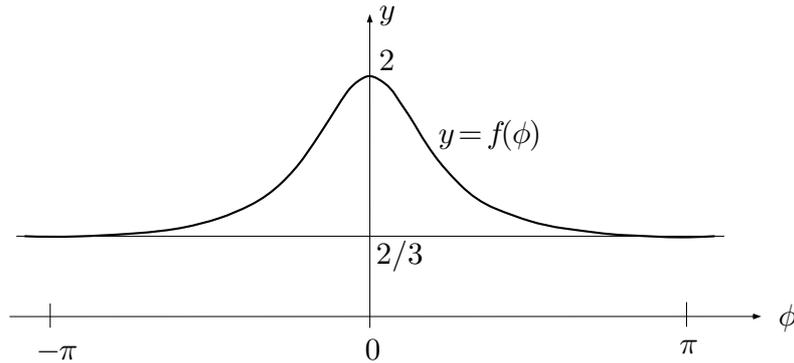


Fig. 2.4.3

Die von Satz (2.12) erfaßten Reihen konvergieren so gut wie die geometrische Reihe, also “linear”. Das heißt konkret: Mit jedem zusätzlich berücksichtigten Term wird der Abbrechfehler, er ist von der Größenordnung

$$\frac{C}{1-q} q^{n+1},$$

um denselben Faktor q verkleinert. Bei den Reihen, die nach dem folgenden Satz konvergieren, ist die Konvergenz viel langsamer.

(2.13) *Gibt es ein $C > 0$, ein $\delta > 0$ und ein k_0 mit*

$$|a_k| \leq C \frac{1}{k^{1+\delta}} \quad \forall k > k_0,$$

so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

□ Es genügt offenbar zu zeigen, daß die Reihe $\sum 1/k^{1+\delta}$ konvergiert, und hierfür wiederum genügt es, daß die Partialsummen

$$s_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{1+\delta}}$$

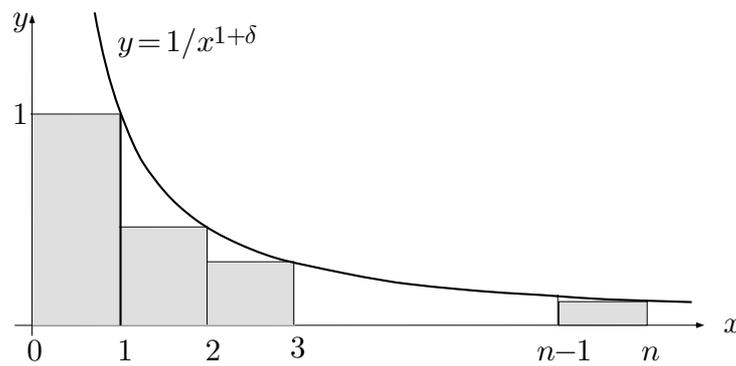


Fig. 2.4.4

beschränkt sind. Wie man der Figur 2.4.4 entnimmt, gilt für alle n :

$$s_n \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^{1+\delta}} dx = 1 + \frac{1}{-\delta}(n^{-\delta} - 1) < 1 + \frac{1}{\delta}. \quad \square$$

Die im Beweis von Satz (2.13) verwendeten Vergleichsreihen konstituieren die sogenannte **Zetafunktion**

$$\zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \quad (s > 1),$$

die in der Zahlentheorie eine große Rolle spielt. Wie Euler als erster bewiesen hat, ist

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

④ Wir betrachten für ein festes $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}[$ die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \tan \frac{\phi}{k}.$$

Der Figur 2.4.5 entnimmt man die Abschätzung

$$\tan \frac{\phi}{k} \leq \frac{1}{k} \tan \phi;$$

somit ist

$$\left| \frac{1}{k} \tan \frac{\phi}{k} \right| \leq \tan \phi \cdot \frac{1}{k^2},$$

und die betrachtete Reihe ist konvergent. ○

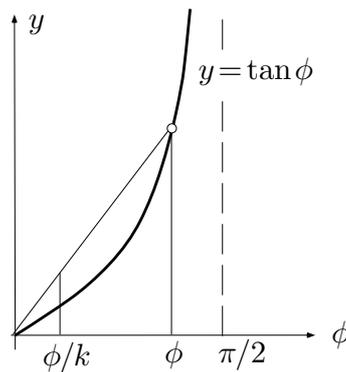


Fig. 2.4.5

Funktionenreihen

Soviel zu den Reihen mit konstanten Gliedern. Viel interessanter sind natürlich Reihen von Funktionen, denn damit haben wir zum ersten Mal ein Mittel in der Hand, das uns aus dem Bereich der Polynome und der **rationalen Funktionen**

$$f(t) := \frac{a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_0}{b_m t^m + b_{m-1} t^{m-1} + \dots + b_0}, \quad b_m \neq 0,$$

herausführt und neue interessante Funktionen erschließt.

Ist f eine Folge von Funktionen mit gemeinsamem Definitionsbereich A :

$$f_k: A \rightarrow \mathbb{X}, \quad x \mapsto f_k(x) \quad (k \in \mathbb{N}),$$

so wird durch

$$s(x) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \tag{8}$$

eine Funktion $s(\cdot)$ definiert. Definitionsbereich von $s(\cdot)$ ist im allgemeinen nicht die ganze Menge A , sondern nur die Menge derjenigen $x \in A$, für die die Reihe (8) konvergiert, also der **Konvergenzbereich** der Reihe.

⑤ Mit $f_k(x) := \frac{x^k}{k!}$ erhält man die **Exponentialreihe**

$$\exp x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Legt man zum Beispiel $\text{dom}(f_k) = \mathbb{R}$ zugrunde, so ist auch $\text{dom}(\exp) = \mathbb{R}$ (dies wird weiter unten gezeigt).

Mit $f_k(x) := x^k$ erhält man die geometrische Reihe

$$s(x) := \sum_{k=0}^{\infty} x^k . \quad (8)$$

Hier ist $\text{dom}(f_k) = \mathbb{R}$, aber $\text{dom}(s) =]-1, 1[$. Es ist allerdings wahr, daß s eine natürliche Fortsetzung \tilde{s} auf ganz $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ besitzt, nämlich die Funktion

$$\tilde{s}(x) := \frac{1}{1-x} .$$

Wer nur die Konvergenz verstanden hat, aber nicht dividieren kann, hat schon mit (8) eine hochinteressante neue Funktion produziert.

Die Reihe

$$\vartheta(x) := 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 \pi x}$$

konvergiert im Intervall $\mathbb{R}_{>0}$. ○

Potenzreihen

Von den Funktionenreihen sind die Potenzreihen am verbreitetsten und am leichtesten zu handhaben, theoretisch und rechnerisch. Das folgende Prinzip stammt von Newton: *“Jede vernünftige Funktion f läßt sich an jeder Stelle im Inneren ihres Definitionsbereichs in eine Potenzreihe entwickeln oder als Potenzreihe ansetzen.”* Die Theorie der Potenzreihen wird am besten verständlich, wenn man sie im Komplexen betrachtet, siehe dazu das Beispiel 2.1.③. Wir werden also wahlweise die reelle Variable x oder die komplexe Variable z benutzen.

Es sei a , eine ganz beliebige Folge von reellen oder komplexen Zahlen. Dann heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \quad (9)$$

eine **Potenzreihe** (an der Stelle 0), und die a_k sind die **Koeffizienten** dieser Reihe. Allgemein ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots$$

eine **Potenzreihe an der Stelle x_0** . Der Konvergenzbereich hängt ab von den Koeffizienten a_k : Streben zum Beispiel die Beträge $|a_k|$ mit $k \rightarrow \infty$ schnell gegen 0, so darf $|z|$ ziemlich groß sein, und die Reihe (9) konvergiert immer noch. Wenn die Beträge $|a_k|$ im Gegenteil mit $k \rightarrow \infty$ “exponentiell” anwachsen, so wird die Reihe nur für sehr kleine $|z|$ konvergieren. Im einzelnen gilt der folgende Satz:

(2.14) Für jede Potenzreihe (9) gibt es eine wohlbestimmte Zahl ρ , $0 \leq \rho \leq \infty$, so daß die Reihe für $|z| < \rho$ absolut konvergiert und für $|z| > \rho$ divergiert. Es gilt

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \quad (\leq \infty),$$

falls dieser Grenzwert existiert.

Der Konvergenzbereich ist also im wesentlichen die Kreisscheibe

$$D_\rho := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < \rho \};$$

die Zahl ρ heißt daher **Konvergenzradius** der Reihe. Über das Konvergenzverhalten auf dem Randkreis ∂D_ρ sagt der Satz nichts. Dies ist, wenn nötig, im Einzelfall abzuklären.

□ Wir betrachten nur den im Zusatz erwähnten Fall, wo sich die Koeffizienten besonders anständig verhalten. Es sei also

$$0 < |z| < \rho := \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|.$$

Dann ist $|z| = q^2 \rho < q\rho < \rho$ für ein $q < 1$ (Fig. 2.4.6). Nach Definition des Grenzwertes gibt es daher ein k_0 mit

$$\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| > q\rho \quad \forall k > k_0;$$

somit gilt für diese k die Beziehung

$$\frac{|a_k z^k|}{|a_{k+1} z^{k+1}|} > \frac{q\rho}{|z|} = \frac{1}{q},$$

und das heißt

$$|a_{k+1} z^{k+1}| < q \cdot |a_k z^k| \quad (k > k_0).$$

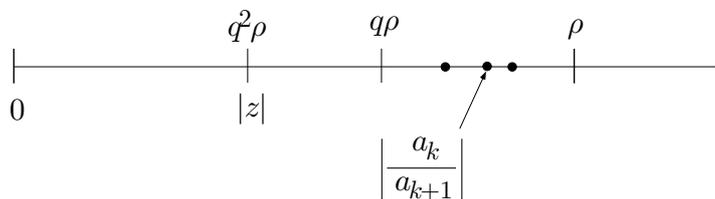


Fig. 2.4.6

Von der Nummer k_0 an werden also die Glieder unserer Potenzreihe von einem zum nächsten betragsmäßig um wenigstens den Faktor $q < 1$ verkleinert. Hieraus folgt mit vollständiger Induktion: Es gilt

$$|a_k z^k| \leq C q^k \quad (k > k_0)$$

für eine geeignete Konstante C . Nach (2.12) ist somit die Reihe (9) für das betrachtete z absolut konvergent. — Ähnlich zeigt man, daß die Reihe (9) für ein z mit $|z| > \rho$ divergiert, da die $|a_k z^k|$ in diesem Fall sogar nach ∞ streben. \square

⑤ (Forts.) Die Exponentialreihe

$$\exp z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

besitzt die Koeffizienten $a_k := 1/k!$, und es folgt

$$\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \frac{(k+1)!}{k!} = k+1 \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty).$$

Der Konvergenzradius ist also ∞ , und das heißt: Die Exponentialreihe ist für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent.

Bei der geometrischen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ haben wir $a_k = 1$ für alle k ; somit ist

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = 1,$$

wie erwartet. Aber auch die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k = x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \dots$$

besitzt den Konvergenzradius 1 (obwohl die a_k gegen ∞ streben):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 + \frac{1}{k})^2} = 1.$$

Bei der Reihe

$$1 + 2x^2 + 4x^4 + 8x^6 + 16x^8 + \dots \quad (10)$$

sind alle $a_k = 0$ (k ungerade); der nützliche Grenzwert existiert also nicht. Es liegt nahe, $x^2 =: u$ zu setzen; die Reihe (10) geht dann über in die Reihe

$$1 + 2u + 4u^2 + 8u^3 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} b_j u^j$$

mit $b_j = 2^j$. Für diese Reihe ist

$$\left| \frac{b_j}{b_{j+1}} \right| = \frac{2^j}{2^{j+1}} = \frac{1}{2} \quad (j \geq 0),$$

sie konvergiert daher im Bereich $|u| < \frac{1}{2}$. Der Konvergenzradius der ursprünglichen Reihe (10) ist somit $1/\sqrt{2}$. \circ

Die folgenden Tatsachen sind für das Arbeiten mit Potenzreihen fundamental und seien hier ohne Beweis angeführt:

(2.15) (a) *Jede Potenzreihe stellt im Inneren ihres Konvergenzbereichs eine stetige, ja sogar beliebig oft differenzierbare Funktion dar.*

(b) *Im Innern des Konvergenzbereichs darf man eine Potenzreihe gliedweise (das heißt: wie ein Polynom) differenzieren und integrieren.*

(c) *Zwei konvergente Potenzreihen darf man “distributiv” miteinander multiplizieren, wobei nach Zusammenfassung gleichartiger Terme die Potenzreihe der Produktfunktion entsteht.*

Rechnen mit Anfangsstücken von Potenzreihen

Es gibt auch eine Art, mit Anfangsstücken (= Partialsummen) von konvergenten Potenzreihen zu rechnen wie mit endlichen Dezimalbrüchen. Damit man weiß, welche Koeffizienten im Endergebnis noch als sicher gelten können, empfiehlt es sich, den mit einer bestimmten Zahl von “signifikanten Stellen” angeschriebenen Ausgangsreihen einen koeffizientenlosen, aber geeignet markierten Zusatzterm anzuhängen. Das sieht bei drei “signifikanten Stellen” zum Beispiel so aus:

$$f(x) = 2 - \frac{x}{2} + 3x^2 + ?x^3 ,$$

und allgemein folgendermaßen:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{r-1}x^{r-1} + ?x^r .$$

Dabei vertritt das Fragezeichen letzten Endes eine ganze Potenzreihe, denn in Wirklichkeit ist ja

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + \dots + a_{r-1}x^{r-1} + a_r x^r + a_{r+1}x^{r+1} + \dots \\ &= a_0 + a_1x + \dots + a_{r-1}x^{r-1} + (a_r + a_{r+1}x + a_{r+2}x^2 + \dots) x^r . \end{aligned}$$

Nur von dem Fragezeichen “unverschmutzte” Koeffizienten des Endergebnisses sind sicher. Die folgenden Beispiele zeigen, wie die Rechnung im einzelnen vor sich geht. — Das Computersystem Mathematica bezeichnet in derartigen Rechnungen den Restterm $?x^r$ mit $0[x]^r$.

⑥ Für \cos und \sin hat man die Entwicklungen

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + ?x^6, \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + ?x^7 = x \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + ?x^6 \right)\end{aligned}$$

(wird im nächsten Abschnitt bewiesen). Hieraus folgt

$$\tan x = x \frac{1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + ?x^6}{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + ?x^6}.$$

Wir führen nun die Division tatsächlich aus und erhalten:

$$\begin{aligned}(1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + ?x^6) : (1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + ?x^6) &= 1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{15}x^4 + ?x^6 \\ -1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + ?x^6 & \\ + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{30}x^4 + ?x^6 & \\ -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{72}x^6 & \\ + \frac{2}{15}x^4 + ?x^6 & \\ -\frac{2}{15}x^4 + \frac{1}{15}x^6 & \\ + ?x^6 &\end{aligned}$$

Die Potenzreihenentwicklung des Tangens an der Stelle 0 besitzt daher folgendes Anfangsstück:

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + ?x^7.$$

○

⑦ Gesucht ist die Lösung $t \mapsto y(t)$ des Anfangswertproblems

$$\dot{y} = t + y + y^2, \quad y(0) = 1.$$

(Diese Differentialgleichung läßt sich nicht “formelmäßig” lösen!) Wir machen den Ansatz

$$y(t) := 1 + \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 + ?t^4 \tag{11}$$

mit unbestimmten Koeffizienten α, β, γ . Dann ist

$$\dot{y}(t) = \alpha + 2\beta t + 3\gamma t^2 + ?t^3, \tag{12}$$

so daß wir im weiteren nur noch “auf t^2 genau” rechnen können. Wir benötigen noch

$$\begin{aligned}y^2(t) &= (1 + \alpha t + \beta t^2 + ?t^3)(1 + \alpha t + \beta t^2 + ?t^3) \\ &= 1 + 2\alpha t + (\alpha^2 + 2\beta)t^2 + ?t^3.\end{aligned} \tag{13}$$

Setzen wir nun (11)–(13) in die Differentialgleichung ein, so ergibt sich

$$\alpha + 2\beta t + 3\gamma t^2 + ?t^3 = t + 1 + \alpha t + \beta t^2 + 1 + 2\alpha t + (\alpha^2 + 2\beta)t^2 + ?t^3 .$$

Koeffizientenvergleich führt auf die Gleichungen

$$\alpha = 2, \quad 2\beta = 1 + 3\alpha \quad 3\gamma = \beta + \alpha^2 + 2\beta ,$$

aus denen sich α, β, γ nacheinander berechnen zu

$$\alpha = 2, \quad \beta = \frac{7}{2}, \quad \gamma = \frac{29}{6} .$$

Damit können wir die gesuchte Funktion $y(\cdot)$ in der Form

$$y(t) = 1 + 2t + \frac{7}{2}t^2 + \frac{29}{6}t^3 + ?t^4 \\ (=: p(t) + ?t^4)$$

schreiben. Wir dürfen nun das Polynom $p(\cdot)$ in der Umgebung von $t := 0$ als Näherungsfunktion für die “wahre Lösung” $y(\cdot)$ betrachten, und zwar ist der Fehler für $t \rightarrow 0$ von der Größenordnung $C \cdot t^4$ oder, wie man üblicherweise schreibt:

$$|y(t) - p(t)| = O(t^4) \quad (t \rightarrow 0) .$$

○

Die Binomialreihe

Als weiteres Beispiel zu den Potenzreihen betrachten wir die Binomialreihe und definieren zunächst für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ (ja sogar $\alpha \in \mathbb{C}$) und $k \in \mathbb{N}$ den **Binomialkoeffizienten** $\binom{\alpha}{k}$ durch

$$\binom{\alpha}{0} := 1, \quad \binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}{k!} \quad (k \geq 1) .$$

Ist $\alpha \in \mathbb{N}$, so stimmt das mit der früheren Definition überein, und es ist $\binom{\alpha}{k} = 0$ für $k > \alpha$. Ist $\alpha \notin \mathbb{N}$, so sind alle Binomialkoeffizienten $\binom{\alpha}{k} \neq 0$. Wir notieren noch die Identität

$$\binom{\alpha}{k+1} (k+1) = \binom{\alpha}{k} (\alpha-k) . \quad (14)$$

Wir wählen nun ein festes α und bilden mit Hilfe der $\binom{\alpha}{k}$ die **Binomialreihe**

$$b_\alpha(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots .$$

Ist $\alpha \in \mathbb{N}$, so ist b_α in Wirklichkeit ein Polynom, und es gilt nach dem binomischen Lehrsatz

$$\forall x \in \mathbb{R} : b_\alpha(x) = (1+x)^\alpha .$$

Im weiteren sei daher $\alpha \notin \mathbb{N}$; dann sind alle $a_k := \binom{\alpha}{k} \neq 0$, und wir erhalten mit (14):

$$\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \left| \frac{\binom{\alpha}{k}}{\binom{\alpha}{k+1}} \right| = \left| \frac{k+1}{\alpha-k} \right| = \left| \frac{1+1/k}{\alpha/k-1} \right| \rightarrow 1 \quad (k \rightarrow \infty) .$$

Die Binomialreihe besitzt somit den Konvergenzradius 1. Wir zeigen nun:

(2.16) *Im Intervall $-1 < x < 1$ gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = (1+x)^\alpha .$$

□ Die Behauptung legt nahe, die Hilfsfunktion

$$f(x) := b_\alpha(x) (1+x)^{-\alpha}$$

einzuführen. Wir müssen zeigen, daß $f(x) \equiv 1$ ist. Zunächst ist $f(0) = 1$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= b'_\alpha(x) (1+x)^{-\alpha} + b_\alpha(x) (-\alpha) (1+x)^{-\alpha-1} \\ &= (1+x)^{-\alpha-1} ((1+x)b'_\alpha(x) - \alpha b_\alpha(x)) . \end{aligned}$$

Im Inneren des Konvergenzintervalls dürfen wir die Binomialreihe gliedweise differenzieren und erhalten

$$\begin{aligned} b'_\alpha(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} k x^{k-1} = \sum_{k'=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k'+1} (k'+1) x^{k'} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (\alpha-k) x^k , \end{aligned}$$

wobei wir (14) benutzt und am Schluß wieder k anstelle von k' geschrieben haben. Die beiden Darstellungen von $b'_\alpha(x)$ werden nun verwendet für die Berechnung von

$$(1+x)b'_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (\alpha-k) x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha \binom{\alpha}{k} x^k = \alpha b_\alpha(x) .$$

Somit ist $f'(x) \equiv 0$. Es folgt $f(x) \equiv 1$ und damit die Behauptung. □

⑧ Wir betrachten den Wert $\alpha := -\frac{1}{2}$ und erhalten zunächst

$$\begin{aligned} \binom{-\frac{1}{2}}{k} &= \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-(k-1))}{k!} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2k-1}{2})}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2^k k!}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-t}} &= (1+(-t))^{-1/2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2^k k!} (-t)^k \\ &= 1 + \frac{1}{2}t + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}t^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}t^3 + \dots \quad (-1 < t < 1). \end{aligned}$$

Wir machen zur Übung noch die Probe: Aus

$$\frac{1}{\sqrt{1-t}} = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 + ?t^3$$

folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-t} &= (1 + \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 + ?t^3)(1 + \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 + ?t^3) \\ &= 1 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2})t + (\frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8})t^2 + ?t^3 \\ &= 1 + t + t^2 + ?t^3, \end{aligned}$$

wie erwartet. ○

Aufgaben

1. Für gegebene reelle Zahlen α und β wird die Folge x_n rekursiv definiert durch

$$x_0 := \alpha, \quad x_1 := \beta, \quad x_n := \frac{1 + x_{n-1}}{x_{n-2}} \quad (n \geq 2).$$

- (a) Bestimme die Häufungspunkte dieser Folge. (*Hinweis:* Mit speziellen Werten von α und β experimentieren, bis eine Gesetzmäßigkeit zum Vorschein kommt.)
- (b) Bestimme die Menge derjenigen Paare (α, β) , die als Anfangsdaten ausgeschlossen werden müssen. Figur!

2. (a) Berechne den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\cosh(k\alpha)} \quad (=: f(x)),$$

dabei ist $\alpha > 0$ eine vorgegebene Zahl und $\cosh t := (e^t + e^{-t})/2$.

(b) Zeige: Die Funktion f genügt der Funktionalgleichung

$$f(e^\alpha x) + f(e^{-\alpha} x) \equiv \frac{2}{1-x}.$$

3. (M) Der Umfang U einer Ellipse mit Halbachsen a und b ist gegeben durch

$$U = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt, \quad \varepsilon := \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Um einen für kleine Exzentrizität ε brauchbaren Näherungswert für U zu erhalten, kann man U nach Potenzen von ε entwickeln:

$$U = c_0 + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + c_3\varepsilon^3 + c_4\varepsilon^4 + \dots$$

Bestimme die Koeffizienten c_0 bis und mit c_4 . Dabei kommen die folgenden Formeln zu Hilfe:

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + ?u^3, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^4 t dt = \frac{3\pi}{16}.$$

4. Es bezeichne a_n die Anzahl Arten, n Leute im Verhältnis 1:2 in zwei Gruppen einzuteilen. Berechne den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 1 + 3z^3 + \dots$$

5. Mit Hilfe der **Fibonacci-Folge**

$$a_0 := 0, \quad a_1 := 1 \quad a_k := a_{k-1} + a_{k-2} \quad (k \geq 2)$$

wird folgende Potenzreihe gebildet:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = z + z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 5z^5 + \dots \quad (*)$$

Hierüber ist nacheinander folgendes zu beweisen:

- (a) Die Reihe (*) konvergiert mindestens für $|z| < 1/2$ und stellt dort eine Funktion $f(z)$ dar.
- (b) Es ist $f(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}$. (Hinweis: Zeige $(1 - z - z^2)f(z) \equiv z$.)
- (c) Die Funktion f besitzt eine Zerlegung der Form

$$f(z) = \frac{A}{1 - \lambda z} + \frac{B}{1 - \mu z}$$

und läßt sich daher als Summe von zwei geometrischen Reihen schreiben. Dies liefert eine zweite Darstellung von f als Potenzreihe und damit einen geschlossenen Ausdruck für die k -te Fibonacci-Zahl a_k .

6. (a) (M) Die Funktion f sei in einer Umgebung von $x = 0$ definiert und genüge der Funktionalgleichung

$$f(f(x)) \equiv \frac{x}{1 - x};$$

endlich sei $f(0) = 0$. Bestimme die Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in der Entwicklung

$$f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + ?x^4.$$

- (b) In Wirklichkeit ist f eine Funktion der einfachen Form $x \mapsto \frac{x}{cx + d}$. Bestimme c und d .

7. Die Folge $(a_n)_{n \geq 0} := (0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, \dots)$ entsteht mit Hilfe der Rekursionsformel $a_n := a_{n-1} + 2a_{n-2}$. Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. (Hinweis: Die Quotienten a_n/a_{n+1} besitzen einen Grenzwert ρ . Dies ist nicht zu beweisen; es genügt, ρ zu bestimmen.)
8. Stelle ein Rekursionsschema auf, das reelle Zahlen x als Input akzeptiert und eine gegen 2^x konvergente Folge produziert. Dabei dürfen nur die vier Grundrechenarten, also weder Logarithmen noch Fakultäten, benützt werden. Schreibe ein Computerprogramm, das den vorgeschlagenen Algorithmus realisiert.

Hinweis:
$$2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-1}.$$

9. Durch die Rekursionsvorschrift

$$z_0 := 1, \quad z_{n+1} := \frac{1}{2}z_n + \frac{i}{z_n} \quad (n \geq 0)$$

wird eine Folge von komplexen Zahlen $z_n = x_n + iy_n$ definiert.

- (a) Berechne z_0, z_1, z_2 .
- (b) Zeige mit vollständiger Induktion: Für alle $n \geq 0$ gilt $x_n \geq 0, y_n \geq 0$.
- (c) Die z_n konvergieren mit $n \rightarrow \infty$ gegen eine gewisse komplexe Zahl ζ (ist nicht zu beweisen). Berechne ζ .

2.5 Die Exponentialfunktion

Die Funktionalgleichung

Die Exponentialfunktion

$$\exp z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

ist für alle $z \in \mathbb{C}$ definiert. Den meisten Eigenschaften dieser Funktion liegt das folgende “Additionstheorem” zugrunde:

(2.17) Für beliebige $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(z + w) = \exp z \cdot \exp w .$$

┌ Wir multiplizieren die beiden absolut konvergenten Reihen

$$\exp z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad \exp w := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!}$$

miteinander und erhalten

$$\exp z \cdot \exp w = \sum_{j, k} \frac{1}{j! k!} z^j w^k .$$

Fassen wir in der Doppelsumme für jedes $r \geq 0$ die Glieder mit $k + j = r$ zu einem Paket zusammen und summieren anschließend über r , so ergibt sich:

$$\dots = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{k+j=r} \frac{1}{j! k!} z^j w^k \right)$$

und nach Erweiterung mit $r!$:

$$\begin{aligned} \dots &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\sum_{k=0}^r \frac{r!}{(r-k)! k!} z^{r-k} w^k \right) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} (z + w)^r = \exp(z + w) , \end{aligned}$$

wie behauptet. ┐

Setzt man zur Abkürzung

$$\exp 1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots =: e \quad (\doteq 2.718),$$

so folgt aus **(2.17)** für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$\exp n = \exp(\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_n) = (\exp 1)^n = e^n,$$

und durch ähnliche Überlegungen ergibt sich weiter:

$$\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}: \quad \exp \frac{p}{q} = \sqrt[q]{e^p} = e^{p/q},$$

was den Namen “Exponentialfunktion” hinreichend begründet. Es liegt nunmehr nahe, für beliebige $z \in \mathbb{C}$ zu definieren:

$$e^z := \exp z.$$

Wir verwenden in freier Weise abwechselnd beide Schreibweisen, je nach typographischer Zweckmässigkeit.

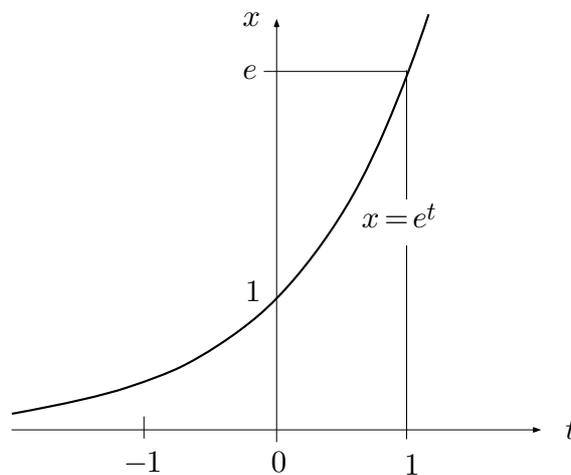


Fig. 2.5.1

Betrachten wir die Exponentialfunktion vorerst für reelle t , so können wir notieren (Fig. 2.5.1):

(2.18) (a) Die Exponentialfunktion ist auf \mathbb{R} positiv und streng monoton wachsend.

(b) Für jedes feste $q \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^t}{t^q} = \infty; \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0.$$

Die Exponentialfunktion wächst also mit $t \rightarrow \infty$ schneller als jede feste Potenz von t .

□ (a) Wegen $e^t \cdot (e^{-t/2})^2 \equiv 1$ gilt $e^t > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Für positives h ist $e^h = 1 + h + \dots > 1$ und somit

$$e^{t+h} - e^t = (e^h - 1)e^t > 0.$$

(b) Für jedes einzelne $q \in \mathbb{N}$ gilt

$$e^t > \frac{t^{q+1}}{(q+1)!} \quad (t > 0),$$

und hieraus folgt

$$\frac{e^t}{t^q} > \frac{t}{(q+1)!} \quad (t > 0).$$

Der betrachtete Quotient strebt daher mit $t \rightarrow \infty$ gegen ∞ . ┘

Die Logarithmusfunktion

Die Exponentialfunktion bildet hiernach die reelle Achse bijektiv auf die positive reelle Achse $\mathbb{R}_{>0}$ ab, und es existiert die Umkehrfunktion

$$(\exp)^{-1} =: \log : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R},$$

genannt **natürlicher Logarithmus** (Fig. 2.5.2). Damit gelten automatisch die Identitäten

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad \log(e^t) = t, \quad \forall x \in \mathbb{R}_{>0} : \quad e^{\log x} = x \quad (1)$$

(siehe Beispiel 2.2.⑥); ferner hat man die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \log x = \infty.$$

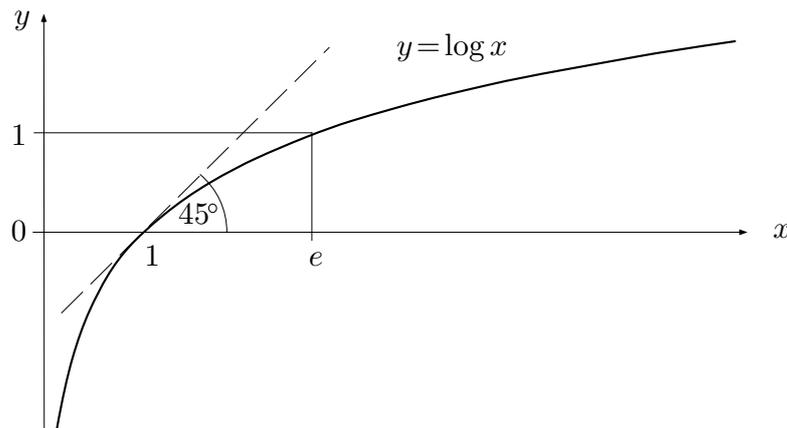


Fig. 2.5.2

Aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion (Satz (2.17)) folgt diejenige des Logarithmus:

$$(2.18) \quad \log(u \cdot v) = \log u + \log v \quad (u, v \in \mathbb{R}_{>0}),$$

die bekanntlich dem Funktionieren des Rechenschiebers und der seinerzeitigen Bedeutung der (Zehner-)Logarithmen fürs numerische Rechnen zugrundeliegt: Sie verwandelt die Multiplikation in die (numerisch einfachere) Addition.

□ Mithilfe von (1) ergibt sich nacheinander

$$\log(u \cdot v) = \log(e^{\log u} \cdot e^{\log v}) = \log(e^{\log u + \log v}) = \log u + \log v. \quad \square$$

Betrachte ein festes $a > 0$. Ähnlich wie vorher $\exp(p/q) = e^{p/q}$ beweist man nun mithilfe von (2.18):

$$\log(a^{p/q}) = \frac{p}{q} \log a \quad (p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*),$$

und mit (1) folgt:

$$\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}: \quad a^{p/q} = e^{\frac{p}{q} \log a}.$$

Dies legt nahe, für beliebiges reelles x die **allgemeine Potenz** a^x folgendermaßen zu definieren:

$$a^x := e^{x \log a} \quad (a > 0, x \in \mathbb{R}).$$

Es gelten dann die üblichen Rechenregeln:

$$\begin{aligned}\log(a^x) &= x \log a, \\ a^{x+y} &= a^x \cdot a^y, \\ (a \cdot b)^x &= a^x \cdot b^x, \\ (a^x)^y &= a^{xy}.\end{aligned}$$

Während die Exponentialfunktion in ihrem Wachstumsverhalten stärker ist als jede noch so hohe Potenz $t \mapsto t^q$, ist die Logarithmusfunktion schwächer als jede noch so kleine Potenz $x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha > 0$):

(2.19) Für jedes feste $\alpha > 0$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^\alpha \log x) = 0.$$

□ Man hat nacheinander

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{e^{\alpha \log x}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y}{e^{\alpha y}} = \frac{1}{\alpha} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^t} = 0;$$

ähnlich schließt man bei der zweiten Behauptung. □

Zwei Standardgrenzwerte

Für spätere Zwecke und zur allgemeinen Bildung berechnen wir noch zwei Grenzwerte:

$$(2.20)(a) \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1.$$

$$(b) \quad \forall x \in \mathbb{R}: \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x;$$

insbesondere gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

□ (a) Aus

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

ergibt sich für beliebiges $z \neq 0$:

$$\frac{e^z - 1}{z} = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots =: g(z).$$

Hier ist g eine (für alle z konvergente) Potenzreihe, mithin eine stetige Funktion, und es folgt

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} g(z) = g(0) = 1 .$$

(b) Wir betrachten den Logarithmus des zu untersuchenden Ausdrucks und haben

$$\log\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = n \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) = x \frac{\log\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \log 1}{x/n} .$$

Mit $\frac{x}{n} =: h_n$ ergibt sich daher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + h_n) - \log 1}{h_n} = x \log'(1) = x ,$$

wobei wir zuletzt von der Ableitung der Logarithmusfunktion Gebrauch gemacht haben. $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ strebt daher gegen e^x , wie behauptet. \square

Hyperbolische Funktionen

In den Anwendungen treten oft gewisse “symmetrische” Kombinationen von e^x und e^{-x} auf, die sogenannten **hyperbolischen Funktionen**. Wir beginnen mit der folgenden Bemerkung: Eine Funktion $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}'$ heißt **gerade**, wenn gilt:

$$\forall x \in \text{dom}(f) : \quad f(-x) = f(x) ,$$

und **ungerade**, wenn gilt:

$$\forall x \in \text{dom}(f) : \quad f(-x) = -f(x) ;$$

dabei wird natürlich vorausgesetzt, daß $\text{dom}(f)$ bezüglich 0 symmetrisch ist. Die Potenzfunktionen $z \mapsto z^k$, $k \in \mathbb{Z}$, sind gerade für gerades k und ungerade für ungerades k . Die Potenzreihenentwicklung einer geraden (bzw. ungeraden) Funktion im Ursprung enthält nur Terme mit geraden (bzw. ungeraden) Exponenten.

Jede Funktion mit einem bezüglich 0 symmetrischen Definitionsbereich läßt sich in einen geraden und einen ungeraden “Anteil” zerlegen:

$$f(x) \equiv \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{gerade}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{ungerade}} .$$

Führen wir diese Zerlegung für die Exponentialfunktion durch (Fig. 2.5.3), so erhalten wir als geraden Anteil den **hyperbolischen Cosinus**

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

und als ungeraden Anteil den **hyperbolischen Sinus**

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Diese Funktionen sind übers Komplexe mit den entsprechenden trigonometrischen Funktionen verwandt und besitzen formal analoge Additionstheoreme usw. wie jene. Mit Hilfe des "Additionstheorems" $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ beweist man leicht

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &\equiv 1 && \text{(hyperbolischer Pythagoras),} \\ \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y, \\ \sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y. \end{aligned}$$

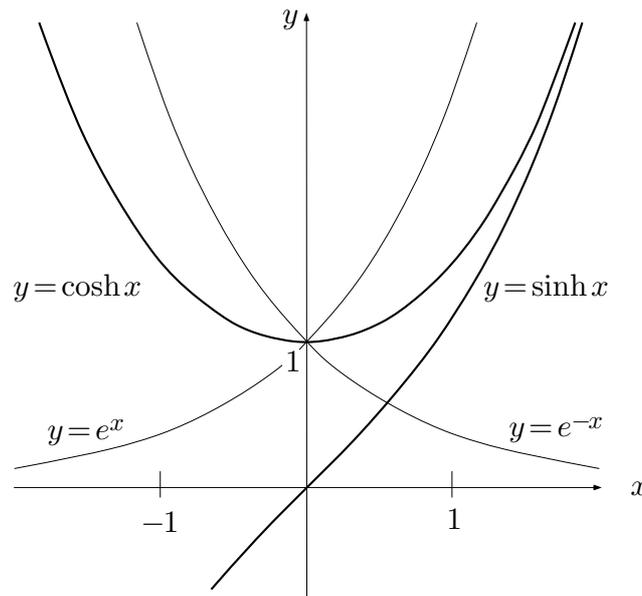


Fig. 2.5.3

Als Differenz einer streng monoton wachsenden und einer streng monoton fallenden Funktion ist \sinh streng monoton wachsend; ferner gilt

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sinh x = \pm\infty.$$

Folglich existiert die Umkehrfunktion, genannt **Areasinus**:

$$(\sinh)^{-1} =: \operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} .$$

Überraschenderweise läßt sich arsinh durch “schon bekannte” Funktionen ausdrücken. Aus $y = \sinh x$ folgt nämlich nacheinander

$$2y = e^x - e^{-x} , \quad e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 , \quad e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1} .$$

Da jedenfalls $e^x > 0$ ist, muß hier das obere Zeichen zutreffen, und wir erhalten $x = \log(y + \sqrt{y^2 + 1})$; das heißt, es gilt

$$\operatorname{arsinh} y = \log(y + \sqrt{y^2 + 1}) \quad (y \in \mathbb{R}) .$$

Auf dem Intervall $\mathbb{R}_{\geq 0}$ wächst

$$x \mapsto \cosh x = \sqrt{\sinh^2 x + 1}$$

(als Zusammensetzung von wachsenden Funktionen) streng monoton von 1 bis ∞ und besitzt somit daselbst eine Umkehrfunktion **Areacosinus**:

$$(\cosh)^{-1} =: \operatorname{arcosh} : \mathbb{R}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} ,$$

die sich ebenfalls durch Logarithmen ausdrücken läßt. Man erhält

$$\operatorname{arcosh} y = \log(y + \sqrt{y^2 - 1}) \quad (y \geq 1) .$$

Wir definieren schließlich noch den **hyperbolischen Tangens** (Fig. 2.5.4) durch

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} .$$

Aus

$$\tanh x = 1 - \frac{2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

folgt: Der Graph des hyperbolischen Tangens nähert sich mit $x \rightarrow \infty$ “exponentiell” der Asymptote $y = 1$. Für die Umkehrfunktion **Areatangens**

$$(\tanh)^{-1} =: \operatorname{artanh} :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$$

erhält man

$$\operatorname{artanh} y = \frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y} \quad (-1 < y < 1) .$$

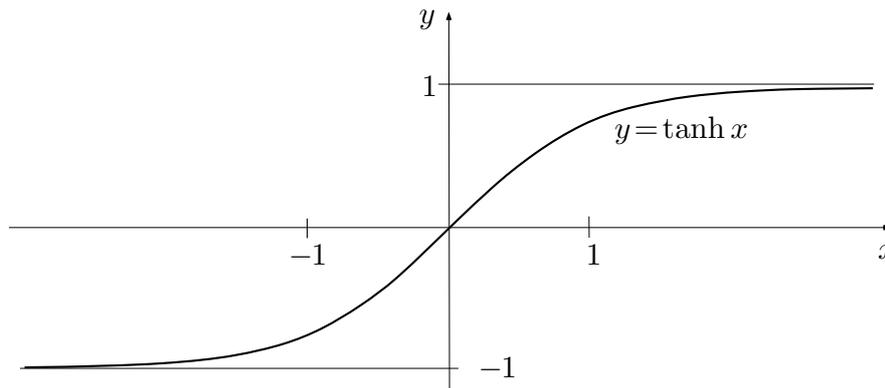


Fig. 2.5.4

Von seinem Charakter her eignet sich der hyperbolische Tangens besonders zur Modellierung von Vorgängen, bei denen eine seit Urzeiten bestehende Situation evolutionär in eine andere dauerhafte Situation übergeht.

Die cis-Funktion

In Abschnitt 1.7 wurde (vorläufig) als handliche Abkürzung die Schreibweise

$$\cos t + i \sin t =: e^{it}$$

eingeführt. Wir müssen zum Schluß zeigen, daß das mit den jetzigen definitiven Vorstellungen über die Exponentialfunktion konsistent ist; in anderen Worten: Wir müssen die sogenannte **cis-Funktion**

$$\text{cis: } t \mapsto e^{it} \quad (t \in \mathbb{R})$$

(‘cis’ für ‘cos + i sin’) untersuchen.

Da die Exponentialreihe reelle Koeffizienten besitzt, gilt für beliebige $z \in \mathbb{C}$:

$$\exp \bar{z} = \overline{\exp z} .$$

□ Ist $a_k = \bar{a}_k$ für alle $k \geq 0$, so folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \bar{z}^k = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k \bar{z}^k = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k} . \quad \square$$

Hieraus ergibt sich für beliebige reelle t :

$$|e^{it}|^2 = e^{it} \cdot \overline{e^{it}} = e^{it} \cdot e^{-it} = e^0 = 1 ;$$

die Punkte e^{it} liegen somit auf dem Einheitskreis $\partial D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ der komplexen Ebene. Es gilt aber noch mehr:

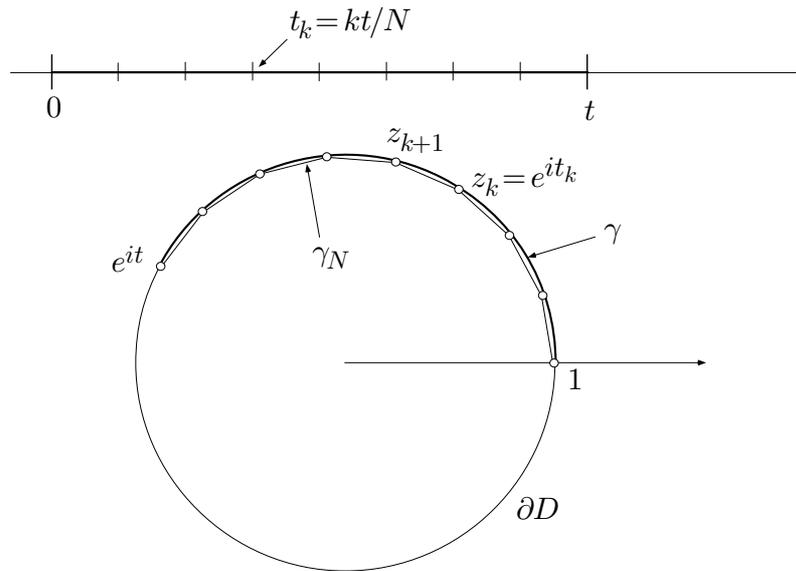


Fig. 2.5.5

(2.21) Die Funktion $\text{cis} : t \mapsto e^{it}$ wickelt die reelle t -Achse längentreu auf den Einheitskreis ∂D auf.

□ Wir betrachten für ein beliebiges, aber festes t , $0 < t < 2\pi$, das Intervall $[0, t] \subset \mathbb{R}$ und sein Bild $\gamma \subset \partial D$. Die Bildmenge γ ist ein bei 1 beginnender Bogen auf ∂D . Teilen wir das Intervall $[0, t]$ in N gleiche Teile (Fig. 2.5.5), so bestimmen die Bilder der Teilungspunkte $t_k := kt/N$ ($0 \leq k \leq N$) ein Sehnepolygon γ_N mit Eckpunkten

$$z_k := e^{it_k} = e^{ikt/N}.$$

Die Länge einer Teilstrecke ist gegeben durch

$$|z_{k+1} - z_k| = \left| e^{i(k+1)t/N} - e^{ikt/N} \right| = \left| e^{ikt/N} \right| \left| e^{it/N} - 1 \right| = \left| e^{it/N} - 1 \right|,$$

unabhängig von k , so daß sich die Länge des ganzen Sehnepolygons berechnet zu

$$L(\gamma_N) = N \left| e^{it/N} - 1 \right| = t \left| \frac{e^{it/N} - 1}{it/N} \right|.$$

Hieraus folgt mit **(2.20)**(a) und **(2.7)**:

$$L(\gamma) = \lim_{N \rightarrow \infty} L(\gamma_N) = t;$$

das heißt: Die von 1 bis e^{it} längs ∂D gemessene Bogenlänge beträgt gerade t , wie behauptet. □

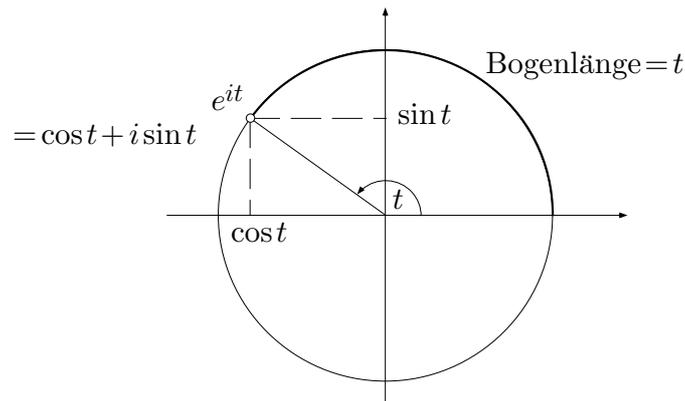


Fig. 2.5.6

Hiernach ist e^{it} der Punkt auf ∂D mit dem Argument (Polarwinkel) t , also der Punkt $\cos t + i \sin t$ (Fig. 2.5.6), in Übereinstimmung mit unserer früheren Vereinbarung. Wir haben damit einen neuen Zugang zu den trigonometrischen Funktionen gewonnen. Sie sind mit der Exponentialfunktion (nicht nur formal, sondern tatsächlich) verknüpft durch die **Eulerschen Formeln**

$$\begin{aligned}\cos t &= \operatorname{Re}(e^{it}) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \\ \sin t &= \operatorname{Im}(e^{it}) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.\end{aligned}$$

Cosinus und Sinus stellen also im wesentlichen den geraden und den ungeraden Anteil der Funktion $t \mapsto e^{it}$ dar. Aus

$$e^{it} = 1 + it + \frac{(it)^2}{2!} + \frac{(it)^3}{3!} + \frac{(it)^4}{4!} + \dots$$

ergeben sich durch Trennung von Real- und Imaginärteil die folgenden für alle $t \in \mathbb{R}$ konvergenten Potenzreihen von \cos und \sin :

$$\begin{aligned}\cos t &= 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j t^{2j}}{(2j)!}, \\ \sin t &= t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j t^{2j+1}}{(2j+1)!}.\end{aligned}$$

Aufgaben

1. Auf einem Taschenrechner stehen nur noch die Tasten $\boxed{1}$, $\boxed{=}$, $\boxed{+}$, $\boxed{\frac{1}{x}}$ und $\boxed{x^2}$ zur Verfügung. Berechne (mit akzeptablem Aufwand) eine brauchbare Approximation für e .

2. (M) Es sei $c := \frac{\log 2}{2\pi} + i$. Dann ist

$$\gamma : t \mapsto z(t) := e^{ct} \quad (-\infty < t < \infty)$$

eine Kurve in der z -Ebene.

- Bestimme die Momentangeschwindigkeit $\dot{z}(t)$ des laufenden Punktes.
- Werden die Geschwindigkeitsvektoren $\dot{z}(t)$ im Ursprung angeheftet, so bilden ihre Spitzen eine neue Kurve $\dot{\gamma}$ (den **Hodographen** von γ). In welcher geometrischen Relation stehen γ und $\dot{\gamma}$ zueinander?
- Zeichne die beiden Kurven γ und $\dot{\gamma}$.

3. Es sei

$$f_0(x) := x, \quad f_{n+1}(x) := e^{f_n(x)} \quad (n \geq 0).$$

Berechne $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_4(x)$.

- Fritz macht sich hinter eine volle Literflasche Whisky seines Vaters. Er trinkt immer wieder einen minimalen Bruchteil λ des Inhalts und füllt mit Wasser nach, bis schließlich die Whiskykonzentration in der Flasche auf $\leq 1/2$ gesunken ist. Wieviel Liter Whisky und wieviel Liter Wasser hat Fritz dabei im ganzen getrunken? Berechne die Grenzwerte für $\lambda \rightarrow 0$.
- Produziere eine Funktion $t \mapsto f(t)$ ($t > 0$), die für $t \rightarrow \infty$ schneller wächst als jede Potenz t^n , $n \geq 0$, aber langsamer als irgendwelche Exponentialfunktionen $e^{\lambda t}$, $\lambda > 0$.
- Jemand berechnet e^{-10} ($\approx 5 \cdot 10^{-5}$) mit Hilfe der Exponentialreihe und berücksichtigt alle Glieder bis und mit $10^{38}/38!$. Wieviel signifikante Dezimalstellen erhält sie ungefähr? ($39! \approx 2 \cdot 10^{46}$)
- Vergleiche das Wachstum der drei Funktionen

$$f(t) := t\sqrt{\log t}, \quad g(t) := (\log t)^{\log t}, \quad h(t) := \exp(\sqrt{t}/\log t)$$

für $t \rightarrow \infty$. (*Hinweis:* Betrachte die Logarithmen von f , g und h .)

- Berechne den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} (1 - \tanh(k\alpha))x^k$.
- Produziere eine Funktion $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, für die gilt

$$f(f(t)) \equiv \sqrt{t}.$$

10. (a) Bestimme die sämtlichen komplexen Lösungen der Gleichung

$$\exp \frac{1-i}{z} = 1 .$$

(b) Bestimme die kleinstmögliche Kreisscheibe um $0 \in \mathbb{C}$, die alle Lösungen dieser Gleichung enthält. Figur!

11. (M) Wieviel gibt, sinngemäß, $\cos(i \log 2)$?