

4

Integralrechnung

4.1 Der Integralbegriff

Die “Integralrechnung” besteht eigentlich aus zwei Teilen: einem begrifflichen Teil und einem Kalkül. In diesem ersten Abschnitt geht es um eine allgemein verwendbare Auffassung des Integrals als Grenzwert von Riemannschen Summen, und im zweiten Abschnitt beweisen wir den Hauptsatz der Infinitesimalrechnung, der die Integralberechnung in eine sozusagen algebraische Aufgabe verwandelt. Daraus ergibt sich dann ein Kalkül, eben die “Technik des Integrierens”. Diesen Kalkül behandeln wir in den Abschnitten 4.3–4.5, und in Abschnitt 4.6 wenden wir das bis dahin Gelernte auf Differentialgleichungen an.

Volumenmessung

Der Integralbegriff stützt sich ganz wesentlich auf die Volumenmessung im \mathbb{R}^n , $n \geq 1$. Wir beginnen daher mit einigen Feststellungen betreffend das “ n -dimensionale Maß”, von den Mathematikern **Lebesgue-Maß** genannt.

Ohne das weiter zu hinterfragen, gehen wir davon aus, daß jeder vernünftige Bereich (Menge) $B \subset \mathbb{R}^n$ ein wohlbestimmtes (**n -dimensionales**) **Maß** oder **Volumen** $\mu(B) \geq 0$ besitzt. Wie man dieses Volumen im Einzelfall berechnet, werden wir noch sehen; für “einfache Körper” stehen uns natürlich die Formeln der Elementargeometrie zur Verfügung.

Bsp: (Fig. 4.1.1–2)

$$\mu([a, b]) = \mu(]a, b[) = b - a ,$$

$$D := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \} \quad \Rightarrow \quad \mu(D) = \pi ,$$

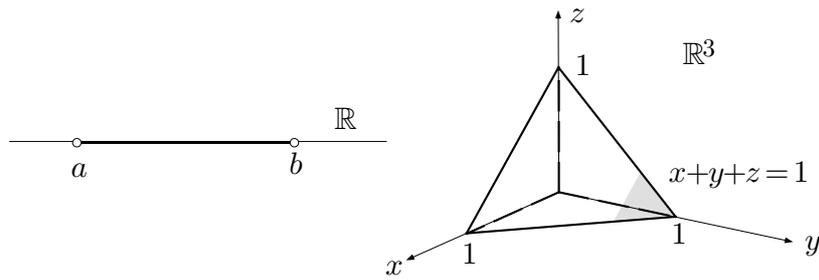


Fig. 4.1.1

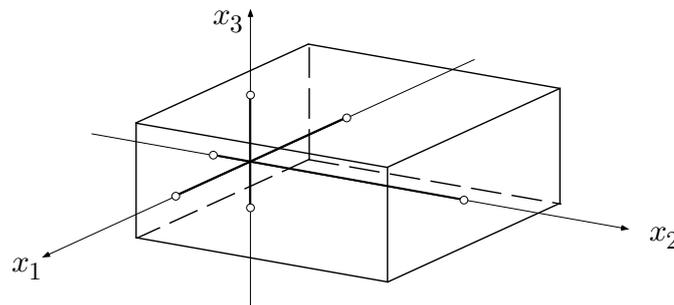


Fig. 4.1.2

$$B := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \} \Rightarrow \mu(B) = \frac{1}{6},$$

$$\mu([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]) = \prod_{i=1}^3 (b_i - a_i).$$

Das Maß μ besitzt folgende charakteristischen Eigenschaften:

- **Monotonie:**

$$B_1 \subset B_2 \quad \Longrightarrow \quad \mu(B_1) \leq \mu(B_2).$$

- **Additivität:** Für beliebige Mengen B_1, B_2 gilt

$$\mu(B_1 \cup B_2) \leq \mu(B_1) + \mu(B_2)$$

(Fig. 4.1.3). Sind B_1 und B_2 disjunkt, so hat man sogar

$$\mu(B_1 \cup B_2) = \mu(B_1) + \mu(B_2).$$

- **Bewegungsinvarianz:** Wird B durch eine Bewegung des \mathbb{R}^n (Translation, Drehung, ...) in eine neue Lage B' gebracht, so ist $\mu(B') = \mu(B)$.

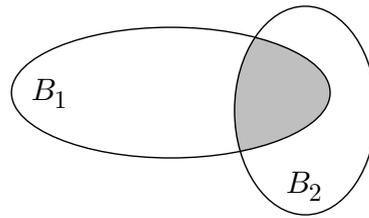


Fig. 4.1.3

Ist $B \subset \mathbb{R}^n$ und $\mu(B) = 0$, so nennt man B eine (**n -dimensionale**) **Nullmenge**. Nullmengen können bei der Integration vernachlässigt werden. Endlich viele Punkte bilden immer eine Nullmenge. Eine vernünftige ebene Kurve ist eine zweidimensionale Nullmenge. Wird diese Kurve aber als “eindimensionales Objekt” aufgefaßt, so hat sie eine durchaus interessante positive Länge. Analog ist eine vernünftige Fläche im \mathbb{R}^3 eine dreidimensionale Nullmenge; als “zweidimensionales Objekt” aufgefaßt hat sie aber einen positiven Flächeninhalt. Allgemein ist der Rand ∂B eines vernünftigen Bereiches $B \subset \mathbb{R}^n$ eine n -dimensionale Nullmenge, und es kommt für das Maß dieses Bereiches nicht darauf an, ob ∂B einbezogen ist oder nicht.

① Wir zeigen, daß sich der Einheitskreis $\partial D \subset \mathbb{R}^2$ durch endlich viele Rechtecke beliebig kleiner Gesamtfläche überdecken läßt. — Betrachte für ein beliebiges $n \geq 2$ das Rechteck R der Figur 4.1.4. Es gilt

$$\begin{aligned} \mu(R) &= 2 \sin \frac{\pi}{n} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right) = 4 \sin \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{\pi}{2n} \\ &\leq 4 \cdot \frac{\pi}{n} \cdot \left(\frac{\pi}{2n} \right)^2 = \frac{\pi^3}{n^3}. \end{aligned}$$

Da n derartige Rechtecke den Einheitskreis ∂D überdecken, ist

$$\mu(\partial D) \leq n \frac{\pi^3}{n^3} = \frac{\pi^3}{n^2},$$

und das kann nur dann für beliebige n zutreffen, wenn $\mu(\partial D) = 0$ ist. \circ

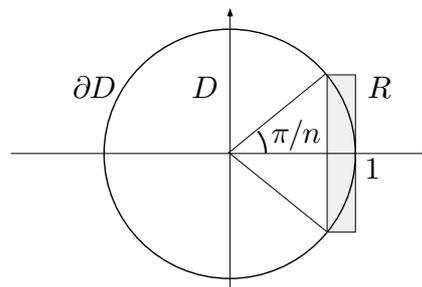


Fig. 4.1.4

Weiter: Stoßen zwei im übrigen disjunkte Bereiche B_1, B_2 längs einer niedrigerdimensionalen “Seitenfläche” zusammen (Fig. 4.1.5), so sagen wir, B_1 und B_2 seien **fast disjunkt**. Es gilt dann immer noch

$$\mu(B_1 \cup B_2) = \mu(B_1) + \mu(B_2) .$$

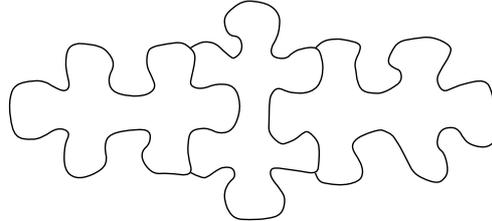


Fig. 4.1.5

Die Idee des “Integrals”

Nun zum eigentlichen Problem! Es geht darum, gewisse analytische, geometrische oder physikalische Größen Θ als “Integral” einer Funktion $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}'$ über einen Bereich $B \subset \text{dom}(f)$ aufzufassen:

$$\Theta = \int_B f \, d\mu = \int_B f(x) \, d\mu(x) . \quad (1)$$

Die Funktion f ist als eine räumlich oder zeitlich (‘ t ’ anstelle von ‘ x ’) veränderliche “Intensität” zu interpretieren, und das Integral Θ ist die von f auf B erzielte “Gesamtwirkung”. Wir geben einige Beispiele für derartige Größen Θ :

- die Fläche zwischen der t -Achse und einer Kurve $y = f(t)$ ($a \leq t \leq b$);
- das Volumen eines Erdhaufens auf dem Areal $B \subset \mathbb{R}^2$, bei gegebener variabler Schütthöhe $z = f(x, y)$;
- die Länge einer Kurve $\gamma: t \mapsto \mathbf{x}(t)$ ($a \leq t \leq b$) in der Ebene oder im Raum (“Längenintensität” ist die Absolutgeschwindigkeit $v(t) := |\dot{\mathbf{x}}(t)|$);
- das Volumen $\mu(B)$ eines n -dimensionalen Bereiches $B \subset \mathbb{R}^n$ (“Volumenintensität” ist die Funktion $\equiv 1$).
- die Gesamtmasse eines Körpers $B \subset \mathbb{R}^3$ von variabler Dichte $\rho = \rho(\mathbf{x})$, analog: die auf B sitzende Gesamtladung einer kontinuierlichen Ladungsverteilung;
- das Trägheitsmoment eines Körpers $B \subset \mathbb{R}^3$ bezüglich einer körperfesten Achse a ;

- die Arbeit eines Vektorfeldes längs einer Kurve;
- der Fluß eines Vektorfeldes durch eine Fläche.

Später wird es darum gehen, derartige Integrale in endlich vielen Schritten zu berechnen, wenn die Funktion f als Ausdruck und der Bereich B etwa durch Ungleichungen gegeben sind. Dies ist die “Technik des Integrierens”. Oft hilft sie allerdings nichts, und man ist auf numerische Methoden angewiesen.

Vom Ansatz her sollte das Integral (1) die folgenden Eigenschaften besitzen:

(a) **Linearität** bezüglich f :

$$\int_B (f_1 + f_2) d\mu = \int_B f_1 d\mu + \int_B f_2 d\mu, \quad \int_B (\alpha f) d\mu = \alpha \int_B f d\mu,$$

(b) **Additivität** bezüglich B :

$$\mu(B_1 \cap B_2) = 0 \implies \int_{B_1 \cup B_2} f d\mu = \int_{B_1} f d\mu + \int_{B_2} f d\mu,$$

(c) Bezug zur Volumenmessung: Ist $f(x) \geq 0$, so gilt

$$\int_B f d\mu = \mu(K_{B,f}); \tag{2}$$

dabei bezeichnet

$$K_{B,f} := \{(\mathbf{x}, y) \mid \mathbf{x} \in B, 0 \leq y \leq f(\mathbf{x})\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

(Fig. 4.1.9) den “**Kuchen**” mit “Grundfläche” $B \subset \mathbb{R}^n$ und oberem Abschluß $\mathcal{G}(f)$.

Wendet man (c) auf die Funktion $f(\mathbf{x}) \equiv 1$ an, so ergibt sich

$$(d) \quad \int_B 1 d\mu = \mu(B \times [0, 1]) = \mu(B) \cdot 1 = \mu(B),$$

und das ist nicht so banal, wie es aussieht: Von rechts nach links gelesen, stellt diese Formel das Volumen $\mu(B)$ als Integral dar und ermöglicht damit, beliebige Volumina mithilfe des Integralkalküls zu berechnen.

Riemannsche Summen

Vorderhand ist das Integral (1) noch eine sehr pauschale, für positive f durch (2) definierte Größe. Um nun an die "Feinstruktur" von (1) heranzukommen, betrachten wir Zerlegungen \mathcal{Z} des Integrationsbereichs $B \subset \mathbb{R}^n$ in endlich viele Teilbereiche B_k ($1 \leq k \leq N$), die untereinander höchstens "Seitenflächen" gemeinsam haben (Fig. 4.1.6). Wir schreiben dafür

$$\mathcal{Z}: \quad B = \bigcup_{k=1}^N B_k .$$

Für derartige Zerlegungen gilt

$$\mu(B) = \sum_{k=1}^N \mu(B_k) .$$

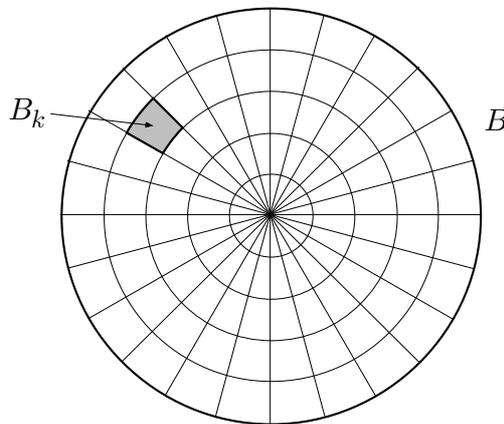


Fig. 4.1.6

Wir benötigen noch das folgende handliche Messinstrument: Für eine beliebige nichtleere Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt

$$\text{diam}(M) := \sup\{|x - x'| \mid x, x' \in M\}$$

(Fig. 4.1.7) der **Durchmesser** von M . Der Durchmesser eines Intervalls ist dessen Länge, der Durchmesser eines Kreises ist dessen Durchmesser, und ein Würfel der Kantenlänge a besitzt den Durchmesser $\sqrt{3}a$.

Wird ein Bereich B wie angegeben in Teilbereiche B_k zerlegt, so nennen wir

$$\max_{1 \leq k \leq N} \text{diam}(B_k) =: \delta(\mathcal{Z})$$

das **Korn** der betreffenden Zerlegung \mathcal{Z} (Fig. 4.1.8).

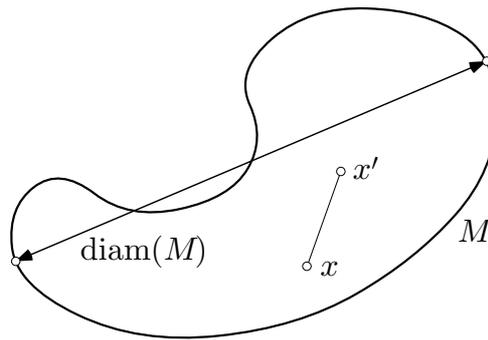


Fig. 4.1.7

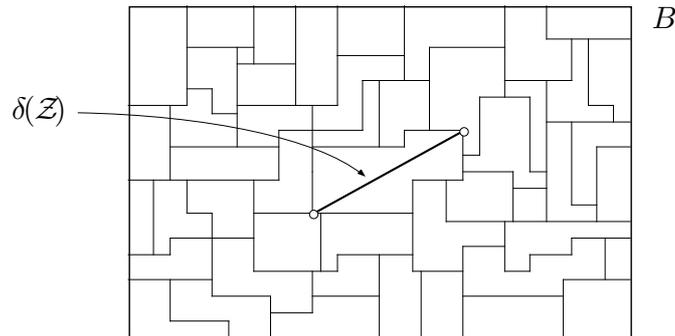


Fig. 4.1.8

Zur Veranschaulichung wählen wir im weiteren $n := 2$. Es sei also $B \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränkter ebener Bereich und

$$f : B \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad \mathbf{x} \mapsto y := f(\mathbf{x})$$

eine stetige Funktion, die wir der Einfachheit halber als lipstetig voraussetzen:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in B : |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}')| \leq C|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|. \quad (3)$$

Der Graph $\mathcal{G}(f) \subset \mathbb{R}^3$ ist eine schlicht über B liegende Fläche, und $\int_B f \, d\mu$ ist definitionsgemäß das Volumen ($=: V$) des zwischen B und $\mathcal{G}(f)$ eingeschlossenen Kuchens $K_{B,f}$. Um dieses Volumen approximativ zu berechnen, wählen wir eine ganz beliebige Zerlegung \mathcal{Z} von B in kleine Teilbereiche B_k und in jedem Teilbereich einen "Meßpunkt" \mathbf{x}_k . Innerhalb eines einzelnen B_k ist f fast konstant, das heißt: Es gilt

$$\forall \mathbf{x} \in B_k : f(\mathbf{x}) \doteq f(\mathbf{x}_k).$$

Genauer: Besitzt die gewählte Zerlegung das Korn $\delta(\mathcal{Z}) =: \delta$, so sind die Distanzen innerhalb eines B_k höchstens gleich δ (Fig. 4.1.10), und es gilt wegen (3):

$$\forall \mathbf{x} \in B_k : |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_k)| \leq C\delta$$

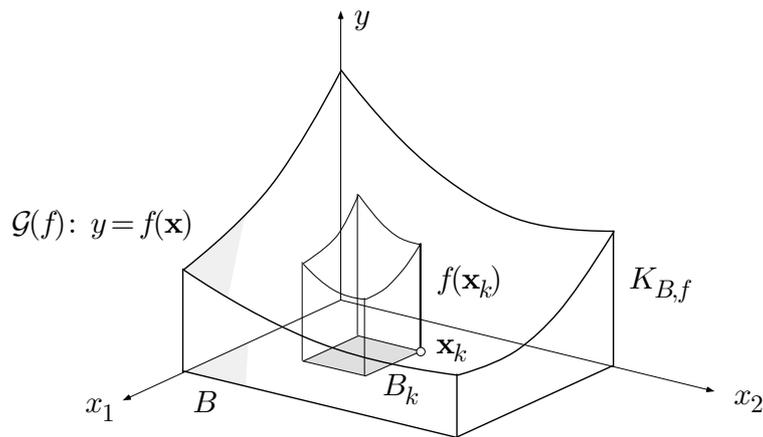


Fig. 4.1.9

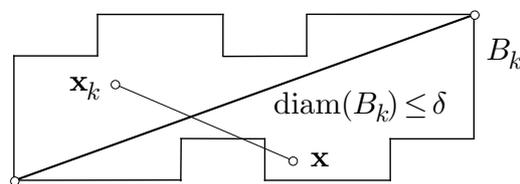


Fig. 4.1.10

bzw.

$$f(\mathbf{x}_k) - C\delta \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_k) + C\delta .$$

Bezeichnen wir das zu B_k gehörige Teilvolumen mit V_k , so liegt daher V_k zwischen den Volumina der beiden prismatischen Körper mit der Grundfläche B_k und der Höhe $f(\mathbf{x}_k) - C\delta$ bzw. $f(\mathbf{x}_k) + C\delta$ (Fig. 4.1.11). Es gilt somit approximativ

$$V_k \doteq f(\mathbf{x}_k) \mu(B_k) \tag{4}$$

und genau

$$(f(\mathbf{x}_k) - C\delta) \mu(B_k) \leq V_k \leq (f(\mathbf{x}_k) + C\delta) \mu(B_k) .$$

Summieren wir dies über k , so ergibt sich wegen

$$\sum_{k=1}^N \mu(B_k) = \mu(B) , \quad \sum_{k=1}^N V_k = V$$

die folgende Eingabelung des Gesamtvolumens V :

$$\sum_{k=1}^N f(\mathbf{x}_k) \mu(B_k) - C\delta \mu(B) \leq V \leq \sum_{k=1}^N f(\mathbf{x}_k) \mu(B_k) + C\delta \mu(B) ,$$

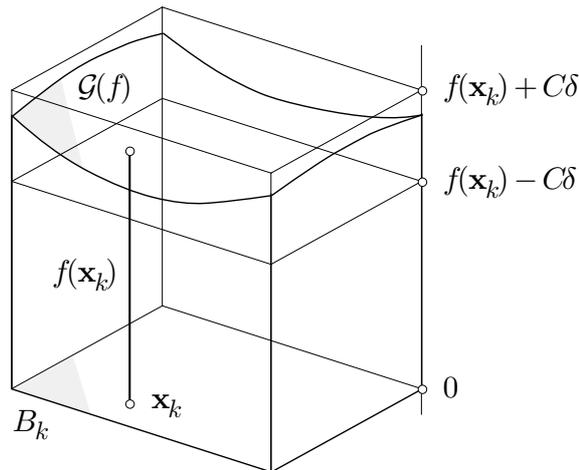


Fig. 4.1.11

was wir auch in der Form

$$\left| V - \sum_{k=1}^N f(\mathbf{x}_k) \mu(B_k) \right| \leq C\delta\mu(B)$$

schreiben können. Die letzte Beziehung läßt sich folgendermaßen interpretieren: Die **Riemannsche Summe**

$$\sum_{k=1}^N f(\mathbf{x}_k) \mu(B_k)$$

ist ein Näherungswert für das gesuchte Volumen V und damit für das angepeilte Integral $\int_B f d\mu$:

$$\int_B f d\mu \doteq \sum_{k=1}^N f(\mathbf{x}_k) \mu(B_k), \quad (5)$$

und zwar ist der Fehler $\leq C\delta\mu(B)$. Ist also eine Fehlerschranke (Toleranz) $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so müssen wir das Korn δ der verwendeten Zerlegung \mathcal{Z} so klein wählen, daß $C\delta\mu(B) \leq \varepsilon$ wird, und sind dann sicher, daß der Fehler in der Approximation (5) höchstens ε beträgt.

② Wie wir später zeigen, hat die Fläche A zwischen dem Intervall $I := [1, 2]$ der x -Achse und der Kurve $y = 1/x$ (Fig. 4.1.12) den Wert $\log 2$. Wir wollen diese Fläche mit einem Fehler $\leq 10^{-2}$ berechnen und benötigen hierzu eine (auf I gültige) Lipschitz-Konstante C der Funktion $f(x) := 1/x$.

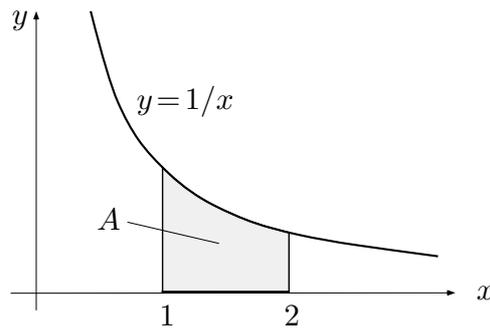


Fig. 4.1.12

Für $x \geq 1$ ist $|f'(x)| = 1/x^2 \leq 1$; somit gilt nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, Version (3.7):

$$\forall x, x' \geq 1: \quad |f(x) - f(x')| \leq |x - x'|,$$

und $C := 1$ ist o.k. — Wir müssen nun das Korn δ so klein wählen, daß

$$C \delta \mu(I) = 1 \cdot \delta \cdot 1 \leq 10^{-2}$$

wird. Es genügt daher, das Intervall I in hundert gleiche Teile

$$I_k := \left[1 + \frac{k-1}{100}, 1 + \frac{k}{100} \right] \quad (1 \leq k \leq 100)$$

zu teilen und als Meßpunkte zum Beispiel die rechten Endpunkte der I_k zu nehmen:

$$x_k := 1 + \frac{k}{100} \quad (1 \leq k \leq 100).$$

Wir haben dann

$$A \doteq \sum_{k=1}^{100} f(x_k) \mu(I_k) = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{1 + k/100} \cdot \frac{1}{100} = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{100 + k} \doteq 0.69065.$$

(Der Tabellenwert ist $\log 2 = 0.69315\dots$)

○

Das Integral als Grenzwert von Riemannschen Summen

Wir wiederholen das (vor diesem Beispiel) zuletzt Gesagte noch einmal: Ist in der betrachteten Situation eine beliebig kleine Toleranz $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so gilt für *jede* Zerlegung

$$\mathcal{Z}: \quad B = \bigcup_{k=1}^N B_k$$

mit einem Korn

$$\delta(\mathcal{Z}) \leq \delta_0 := \frac{\varepsilon}{C\mu(B)}$$

die Beziehung

$$\left| \int_B f d\mu - \sum_{k=1}^N f(\mathbf{x}_k) \mu(B_k) \right| \leq \varepsilon. \quad (6)$$

Das ist aber nichts anderes als die verbale Beschreibung des Faktums

$$\int_B f d\mu = \lim_{\delta(\mathcal{Z}) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N f(\mathbf{x}_k) \mu(B_k).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung, also der Grenzwert der Riemannschen Summen für immer feinere Zerlegungen, heißt **Riemannsches Integral der Funktion f über den Bereich B** .

Aufgrund der vorangegangenen Überlegungen definieren wir nunmehr allgemein, das heißt: für beliebige beschränkte $B \subset \mathbb{R}^n$ und beliebige $f: B \rightarrow \mathbb{X}$:

$$\int_B f(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) := \lim_{\delta(\mathcal{Z}) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N f(\mathbf{x}_k) \mu(B_k). \quad (7)$$

Der Übergang von den Riemannschen Summen zum Integral ist von den typographischen Metamorphosen

$$\sum_{k=1}^N \longrightarrow \int_B, \quad f(\mathbf{x}_k) \longrightarrow f(\mathbf{x}), \quad \mu(B_k) \longrightarrow d\mu(\mathbf{x})$$

begleitet. Der in der Analysis für manches herhaltende Buchstabe ‘ d ’ vor einer Variablen will hier die Idee: “ein kleines Bißchen von dem Betreffenden” vermitteln — $d\mu(\mathbf{x})$ also die Idee: “ein kleines Bißchen Volumen an der Stelle \mathbf{x} ”; man nennt das auch ein **Volumenelement**. Die folgenden einfacheren Schreibweisen sind allgemein üblich: Für Volumenelemente auf der Zahlengeraden \mathbb{R}^1 schreibt man kurz dx , dt , ... anstelle von $d\mu(x)$, $d\mu(t)$, ...; “Flächenelemente” in \mathbb{R}^2 werden oft mit dA bezeichnet (‘ A ’ für englisch *area*; der Buchstabe F ist sonst schon überstrapaziert), und für dreidimensionale Volumenelemente schreibt man gern dV .

In dieser Weise angeregt kann man die Beziehung (4) umschreiben in

$$dV = f(\mathbf{x}) dA$$

und erhält direkt

$$V = \int dV = \int_B f(\mathbf{x}) dA. \quad (8)$$

Bei dem zuletzt vollzogenen ‘‘Kurzschluß’’ handelt es sich nicht um einen Beweis, sondern um eine von der Anschauung unterstützte Manipulation von Symbolen, die sich bewährt hat. Es ist eine Art Stenographie für den umständlicheren Vorgang mit den Zerlegungen \mathcal{Z} und kann jederzeit in jenen zurückübersetzt werden. Wir werden im Gebrauch dieser Stenographie noch einige Übung erlangen.

Aus (7) folgt mit Satz (2.10): Ist \mathcal{Z} eine Folge von immer feineren Zerlegungen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(\mathcal{Z}_n) = 0,$$

und wird für jedes n eine zu \mathcal{Z}_n gehörige Riemannsche Summe Σ_n berechnet, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma_n = \int_B f(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}). \quad (9)$$

② (Forts.) Wir haben vorher einen Näherungswert für das Integral

$$A := \int_{[1,2]} \frac{1}{x} dx$$

bestimmt und wollen nun auch den exakten Wert kennenlernen. Hierzu verwenden wir eine geeignet gewählte Folge \mathcal{Z} von Zerlegungen des Intervalls $[1, 2]$, und zwar teilt die Zerlegung \mathcal{Z}_N das Intervall auf einer logarithmischen Skala in N gleiche Teile (Fig. 4.1.13). Wir setzen also

$$x_k := 2^{k/N} \quad (0 \leq k \leq N)$$

und erzeugen damit die ungleich langen Teilintervalle

$$I_k := [x_{k-1}, x_k] \quad (1 \leq k \leq N).$$

Das Teilintervall I_k besitzt die Länge

$$\text{diam}(I_k) = \mu(I_k) = x_k - x_{k-1} = 2^{(k-1)/N} (2^{1/N} - 1) < 2 (2^{1/N} - 1).$$

Folglich ist das Korn $\delta(\mathcal{Z}_N) < 2(2^{1/N} - 1)$, und wegen

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (2^{1/N} - 1) = \lim_{t \rightarrow 0} (2^t - 1) = 0$$

gilt $\lim_{N \rightarrow \infty} \delta(\mathcal{Z}_N) = 0$, so daß wir (9) anwenden dürfen.

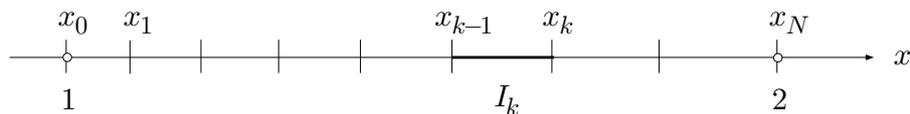


Fig. 4.1.13

Wir wählen als Meßpunkte die linken Endpunkte der I_k und berechnen die zugehörigen Riemannschen Summen Σ_N :

$$\begin{aligned}\Sigma_N &= \sum_{k=1}^N f(x_{k-1}) \mu(I_k) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{x_{k-1}} (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{x_k}{x_{k-1}} - 1 \right) \\ &= \sum_{k=1}^N (2^{1/N} - 1) = N (2^{1/N} - 1),\end{aligned}$$

denn alle N Summanden haben denselben Wert (das ist der Witz der gewählten Zerlegungen). Nach (9) erhalten wir daher

$$\begin{aligned}A &= \lim_{N \rightarrow \infty} (N (2^{1/N} - 1)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{e^{\log 2/N} - 1}{1/N} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{t \log 2} - 1}{t} = \log 2,\end{aligned}$$

wie behauptet. ○

Wir haben in unseren Überlegungen vorausgesetzt, daß f stetig ist, ja sogar einer Lipschitz-Bedingung genügt. Das ist in Wirklichkeit nicht nötig. Für die Existenz des Grenzwerts (7) genügt es, wenn f beschränkt und **fast überall stetig** ist, das heißt: nur eine Nullmenge $X \subset B$ von Unstetigkeitsstellen aufweist. Ein $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ darf also isolierte Sprungstellen haben, ein $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ längs einer Kurve sprunghaft von 1 auf 0 abfallen usw.

Um das einzusehen, überlegen wir folgendermaßen, wobei wir in Fig. 4.1.14 den eindimensionalen Fall $B \subset \mathbb{R}$ darstellen: Es sei

$$\forall x \in B: \quad |f(x)| \leq M,$$

und es sei eine Fehlerschranke $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wird B hinreichend fein unterteilt, so ist das Gesamtmaß derjenigen B_k , die die Nullmenge X der Unstetigkeitsstellen treffen, kleiner als $\varepsilon/(4M)$. Die Schwankung von f auf einem derartigen "schlechten" B_k ist jedenfalls $\leq 2M$. Der von den schlechten B_k herrührende Volumenfehler (in der Figur durch die schmalen hohen Rechtecke repräsentiert) beträgt daher insgesamt höchstens

$$2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Auf der Vereinigung der übrigen (der "guten") B_k ist f stetig. Wenn man sie eventuell weiter unterteilt, kann man erreichen, daß die Schwankung von f in jedem einzelnen von ihnen $\leq \varepsilon/(2\mu(B))$ wird. Der von einem guten B_k herrührende Volumenfehler beträgt dann höchstens

$$\frac{\varepsilon}{2\mu(B)} \mu(B_k),$$

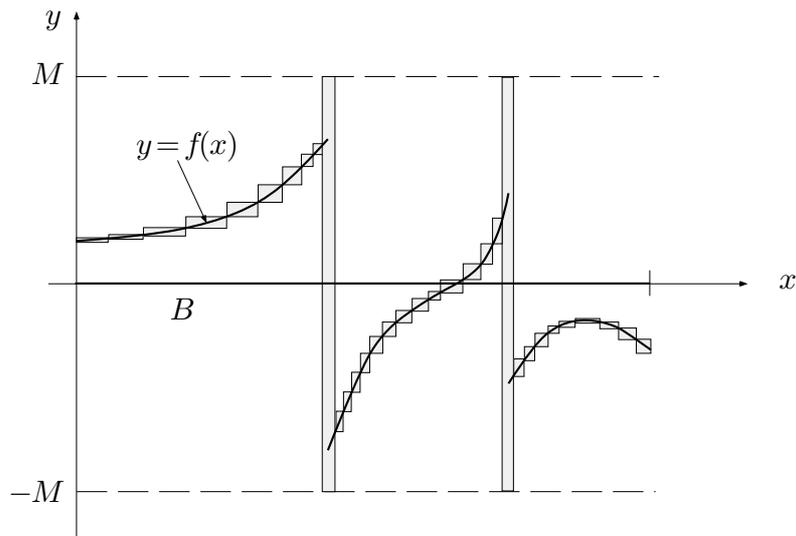


Fig. 4.1.14

so daß die guten B_k insgesamt höchstens

$$\frac{\varepsilon}{2\mu(B)} \sum_{\text{gute } B_k} \mu(B_k) \leq \frac{\varepsilon}{2\mu(B)} \mu(B) = \frac{\varepsilon}{2}$$

zum Gesamtfehler beitragen. (Dieser Beitrag wird in der Figur durch die Gesamtfläche der kleinen Rechtecke repräsentiert.)

Durch hinreichend feine Unterteilung können wir daher (6) garantieren, auch wenn f gewisse Unstetigkeitsstellen aufweist.

Geometrische und physikalische Grössen, die sich als Integral auffassen lassen

Bevor wir eine allgemeine Methode zur Berechnung von Integralen angeben, wollen wir verschiedene der zu Beginn dieses Abschnitts erwähnten geometrischen oder physikalischen Grössen tatsächlich als Integrale auffahren lassen.

- Ohne weiteres ist klar: Der zwischen der x -Achse und dem Graphen $\mathcal{G}(f)$ einer Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eingeschlossene Flächeninhalt A ist darstellbar in der Form

$$A = \int_{[a,b]} f(x) dx .$$

Nimmt f beiderlei Vorzeichen an (Fig. 4.1.15), so werden in dem Integral

$$\int_{[a,b]} f(x) dx := \lim_{\delta(\mathcal{Z}) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N f(x_k) \mu(I_k)$$

die unterhalb der x -Achse liegenden Flächenstücke automatisch negativ gerechnet.

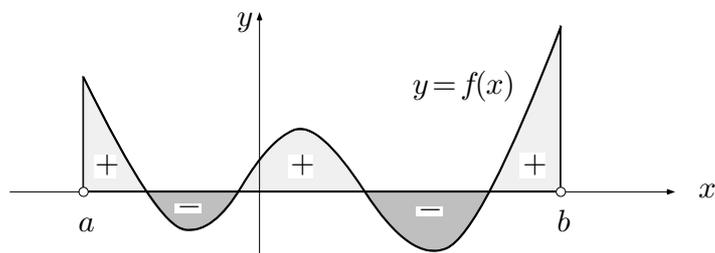


Fig. 4.1.15

Wir haben oben die approximative Beziehung (4) symbolisch umgewandelt in (8). Analog haben wir hier

$$A_k \doteq f(x_k) \mu(I_k)$$

(Figur 4.1.16 links) und abgekürzt

$$dA = f(x) dx$$

(Figur 4.1.16 rechts). Die letzte Formel ist nicht eine obskure Beziehung zwischen “unendlich kleinen Größen”, sondern — wie schon gesagt — ein Stenogramm für einen ausführlicheren Gedankengang.

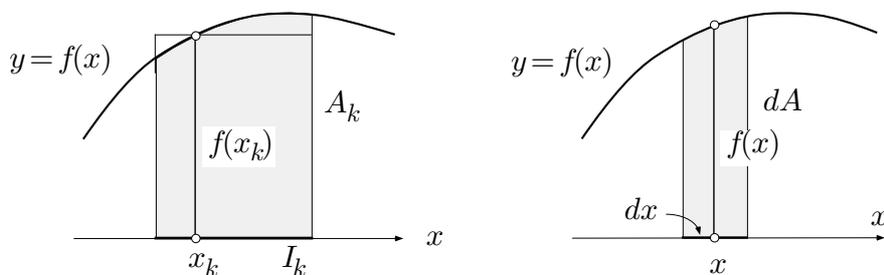


Fig. 4.1.16

- Wir betrachten weiter die Gesamtmasse eines dreidimensionalen Körpers B der variablen Dichte $\rho(\cdot)$. Wird B in sehr kleine Teilbereiche B_k zerlegt (Fig. 4.1.17), so ist $\rho(\cdot)$ auf jedem einzelnen B_k fast konstant. Die Masse m_k von B_k ergibt sich somit approximativ zu

$$m_k \doteq \rho(\mathbf{x}_k) \mu(B_k), \quad (10)$$

wobei $\mathbf{x}_k \in B_k$ ein beliebig gewählter Meßpunkt ist. Die Gesamtmasse m läßt sich daher wie folgt approximieren:

$$m = \sum_{k=1}^N m_k \doteq \sum_{k=1}^N \rho(\mathbf{x}_k) \mu(B_k) \doteq \int_B \rho(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}),$$

und zwar ist der Fehler an beiden \doteq -Stellen umso kleiner, je feiner die Zerlegung \mathcal{Z} ist. In anderen Worten: “Im Limes” gilt das Gleichheitszeichen, und die gesuchte Gesamtmasse erscheint tatsächlich als Integral:

$$m = \int_B \rho(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}). \quad (11)$$

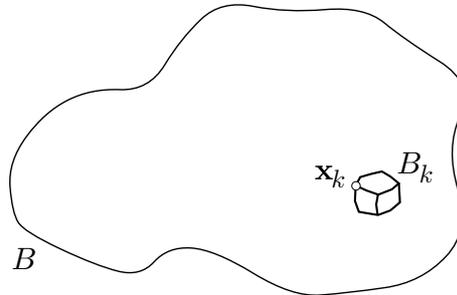


Fig. 4.1.17

Nach einiger Übung in diesen Dingen wird man ohne viel Federlesens anstelle von (10) schreiben:

$$dm = \rho(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x})$$

(oder kürzer: $dm = \rho dV$) und dann gleich zu (11) kommen.

- Eine Konfiguration von endlich vielen Punktmassen m_k ($1 \leq k \leq N$) an den Stellen $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^3$ (Fig. 4.1.18) besitzt den Schwerpunkt

$$\mathbf{s} = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \mathbf{x}_k}{\sum_{k=1}^N m_k}.$$

Diese Formel ergibt sich aus der Momentenbedingung

$$\sum_{k=1}^N m_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{s}) = \mathbf{0};$$

siehe dazu auch Beispiel 1.6.②).

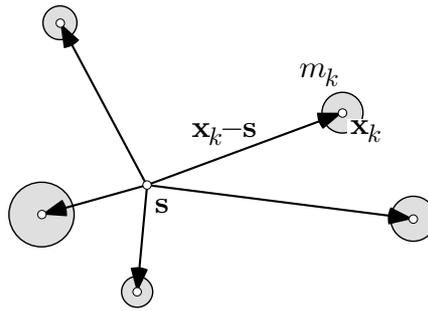


Fig. 4.1.18

Wir betrachten nun einen Bereich $B \subset \mathbb{R}^n$, den wir uns mit Masse der Dichte 1 belegt denken. Ein derartiger Bereich besitzt ebenfalls einen Schwerpunkt \mathbf{s} , und zwar hängt \mathbf{s} nur von der "Geometrie" von B ab. Um an diesen Schwerpunkt heranzukommen, zerlegen wir B in sehr kleine Teilbereiche B_k , die wir dann als Punktmassen der Masse $\mu(B_k)$ an Stellen $\mathbf{x}_k \in B_k$ auffassen können (Fig. 4.1.19). Wir schreiben nun für dieses Massensystem die Momentenbedingung an:

$$\sum_{k=1}^N \mu(B_k) (\mathbf{x}_k - \mathbf{s}) = \mathbf{0},$$

und bringen das auf die Form

$$\left(\sum_{k=1}^N \mu(B_k) \right) \mathbf{s} = \sum_{k=1}^N \mu(B_k) \mathbf{x}_k .$$

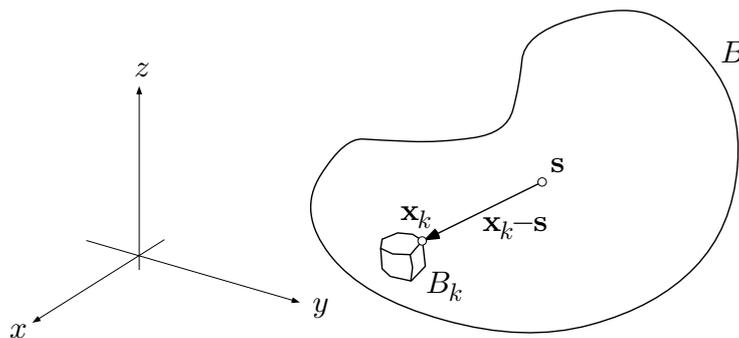


Fig. 4.1.19

Führen wir hier den Grenzübergang $\delta(\mathcal{Z}) \rightarrow 0$ durch, so ergibt sich

$$\mu(B) \mathbf{s} = \int_B \mathbf{x} d\mu(\mathbf{x}), \quad (12)$$

wobei hier rechter Hand die vektorwertige Funktion

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) := \mathbf{x}$$

über B integriert wird. Der Anschaulichkeit halber denken wir uns das im (x, y, z) -Raum und schreiben dV anstelle von $d\mu(\mathbf{x})$. Indem wir (12) “koordinatenweise” lesen, erhalten wir dann für die Koordinaten ξ , η , ζ des Schwerpunkts \mathbf{s} :

$$\xi = \frac{1}{\mu(B)} \int_B x dV, \quad \eta = \frac{1}{\mu(B)} \int_B y dV, \quad \zeta = \frac{1}{\mu(B)} \int_B z dV.$$

- Rotiert die in der (ρ, z) -Halbebene gezeichnete Kurve

$$\gamma: \quad \rho = f(z) \quad (a \leq z \leq b)$$

um die z -Achse (Fig. 4.1.20), so entsteht eine Rotationsfläche S . S ist Mantelfläche eines Rotationskörpers K , dessen Volumen $V := \mu(K)$ nun berechnet werden soll.

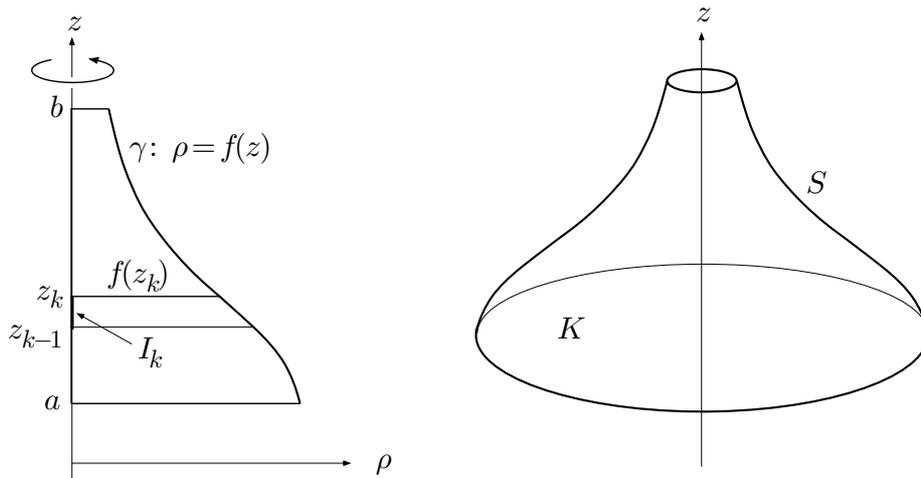


Fig. 4.1.20

Hierzu zerlegen wir das Intervall $I := [a, b]$ in kleine Teilintervalle

$$I_k := [z_{k-1}, z_k] \quad (1 \leq k \leq N).$$

Die zwei Ebenen $z = z_{k-1}$ und $z = z_k$ schneiden aus K eine kreisrunde flache Scheibe heraus, deren Volumen V_k approximativ gegeben ist durch

$$V_k \doteq \pi (f(z_k))^2 (z_k - z_{k-1}) = \pi (f(z_k))^2 \mu(I_k).$$

Man könnte dies wie seinerzeit (4) durch eine Fehlerabschätzung präzisieren. Wir machen aber lieber gleich weiter und summieren über k ; es ergibt sich

$$V \doteq \pi \sum_{k=1}^N (f(z_k))^2 \mu(I_k) .$$

Der Grenzübergang $\delta(\mathcal{Z}) \rightarrow 0$ macht aus dem ‘ \doteq ’ ein ‘ $=$ ’ und aus der rechten Seite ein Integral, und zwar erhalten wir die folgende Formel:

$$V = \pi \int_{[a,b]} (f(z))^2 dz .$$

Der schnellste Weg zu dieser Formel geht über

$$dV = \pi (f(z))^2 dz ,$$

was man direkt der Figur 4.1.21 entnimmt.

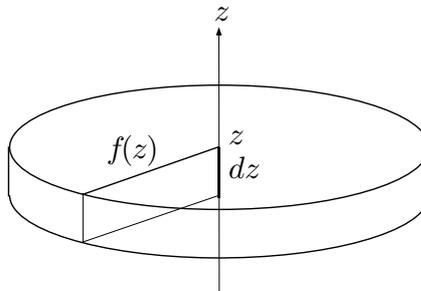


Fig. 4.1.21

- Wir betrachten noch einen Rotationskörper K in folgender Disposition: Gegeben ist eine positive Funktion

$$z = f(\rho) \quad (0 \leq \rho \leq R) ,$$

und K entsteht durch Rotation des Profils

$$P := \{ (\rho, z) \mid 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq z \leq f(\rho) \}$$

um die z -Achse (Fig. 4.1.22).

Um das Volumen von K zu bestimmen, wählen wir von Anfang an den schnellen Weg. Wir betrachten also ein ‘‘infinitesimales’’ Teilintervall von $I := [0, R]$ der Breite $d\rho$ im Abstand ρ von der Achse. Der auf diesem Intervall stehende infinitesimale Streifen von P hat die Fläche

$$dA = f(\rho) d\rho$$

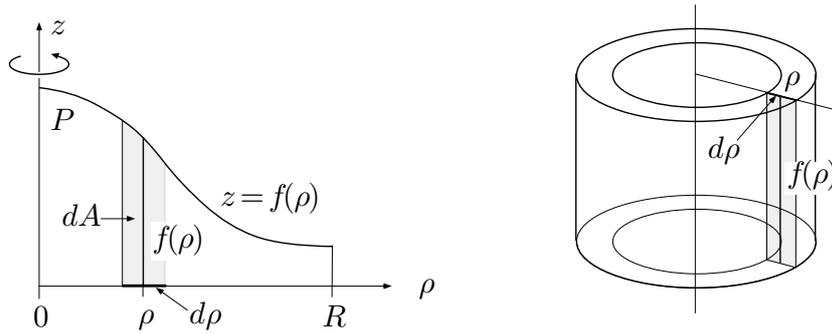


Fig. 4.1.22

und produziert bei der Rotation eine zylindrische Hülse vom Umfang $2\pi\rho$ und somit vom Volumen

$$dV = 2\pi\rho dA = 2\pi\rho f(\rho) d\rho .$$

Für das Volumen von K erhalten wir daher die Formel

$$V = 2\pi \int_{[0,R]} \rho f(\rho) d\rho .$$

• Rotiert eine Punktmasse m mit Winkelgeschwindigkeit ω um die z -Achse, so ist ihre Absolutgeschwindigkeit v gegeben durch $v = \rho\omega$, wobei ρ den Abstand von der Drehachse bezeichnet (Fig. 4.1.23), und deren kinetische Energie durch

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\rho^2\omega^2 . \quad (13)$$

Man nennt

$$\Theta := \rho^2 m$$

das **Trägheitsmoment** des rotierenden Massenpunktes bezüglich der z -Achse. Mit Hilfe dieses Θ können wir anstelle von (13) schreiben:

$$T = \frac{1}{2} \Theta \omega^2 .$$

Wir betrachten jetzt einen Körper $K \subset \mathbb{R}^3$, rotationssymmetrisch oder nicht, der zur Rotation mit Winkelgeschwindigkeit ω um die z -Achse vorgesehen ist. K sei homogen mit Masse der Dichte m^* belegt. Ein Volumenelement $d\mu(\mathbf{x})$ an der Stelle \mathbf{x} besitzt dann die Masse $dm = m^* d\mu(\mathbf{x})$, das Trägheitsmoment

$$d\Theta = \rho^2 dm = m^* \rho^2(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x})$$

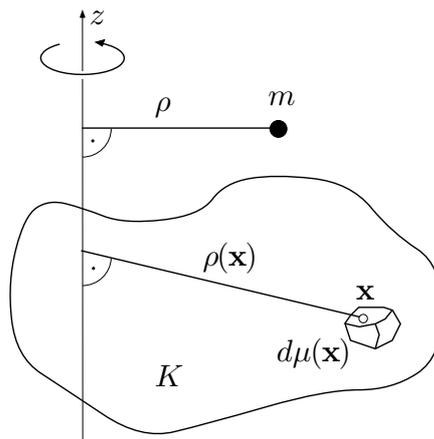


Fig. 4.1.23

und folglich bei der Winkelgeschwindigkeit ω die kinetische Energie

$$dT = \frac{1}{2} \omega^2 d\Theta = \frac{1}{2} \omega^2 m^* \rho^2(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) .$$

Die kinetische Gesamtenergie hat somit den Wert

$$T = \int dT = \frac{1}{2} \omega^2 m^* \int_K \rho^2(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) . \quad (14)$$

Die Größe

$$\begin{aligned} \Theta &:= m^* \int_K \rho^2(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) \\ &= m^* \int_K (x^2 + y^2) dV \end{aligned}$$

(es ist ja $\rho(\mathbf{x}) = \sqrt{x^2 + y^2}$) heißt **Trägheitsmoment** des Körpers K bezüglich der z -Achse. Mit dieser Abkürzung schreibt sich (14) in der Gestalt

$$T = \frac{1}{2} \Theta \omega^2 ,$$

und der Vergleich mit (13) zeigt erstens: Das Trägheitsmoment ist das für die Drehbewegung maßgebende Analogon zur Masse, und zweitens: Die kinetische Energie ist, unabhängig von der Gestalt von K , proportional zum Quadrat der Winkelgeschwindigkeit ω .

③ Es soll das das Trägheitsmoment eines Vollzylinders bezüglich seiner Achse berechnet werden. Gemeint ist ein Kreiszyylinder vom Radius R , der Höhe h und der Dichte $m^* := 1$; Achse sei die z -Achse.

Betrachte ein infinitesimales Intervall $d\rho$ im Abstand ρ von der z -Achse. Zu diesem Intervall gehört eine zylindrische Hülse (Fig. 4.1.24) vom Volumen

$$dV = 2\pi\rho \cdot h d\rho,$$

und alle Punkte dieser Hülse haben denselben Abstand ρ von der Drehachse. Die Hülse besitzt daher das Trägheitsmoment

$$d\Theta = \rho^2 dm = \rho^2 m^* dV = 2\pi h \rho^3 d\rho,$$

und das Trägheitsmoment des ganzen Zylinders wird

$$\Theta = \int d\Theta = 2\pi h \int_{[0,R]} \rho^3 d\rho.$$

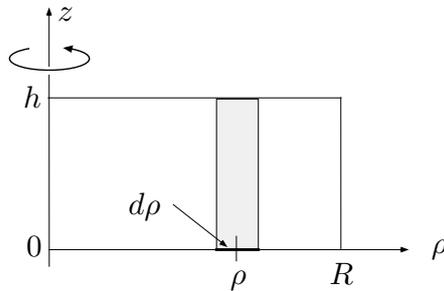


Fig. 4.1.24

Wir wollen nun dieses Integral tatsächlich ausrechnen. Hierzu teilen wir das Intervall $I := [0, R]$ durch die Punkte

$$\rho_k := k \frac{R}{N} \quad (0 \leq k \leq N)$$

in N gleiche Teile $I_k := [\rho_{k-1}, \rho_k]$ der Länge $\mu(I_k) = R/N$ (Fig. 4.1.25). Die zu dieser Zerlegung von I gehörigen Riemannschen Summen Σ_N haben die Form

$$\Sigma_N = \sum_{k=1}^N f(\rho_k) \mu(I_k) = \sum_{k=1}^N \rho_k^3 \cdot \frac{R}{N} = \left(\frac{R}{N}\right)^4 \sum_{k=1}^N k^3.$$

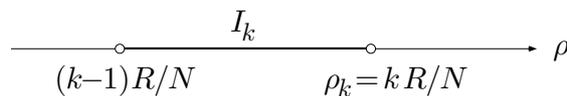


Fig. 4.1.25

Die Summe der ersten N Kubikzahlen ist (zufälligerweise) gleich dem Quadrat der Summe der ersten N Zahlen selber, das heißt: Es gilt

$$\sum_{k=1}^N k^3 = \left(\frac{N(N+1)}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} N^4 \left(1 + \frac{1}{N} \right)^2.$$

Damit ergibt sich

$$\Sigma_N = \frac{R^4}{4} \left(1 + \frac{1}{N} \right)^2$$

und folglich wegen (9):

$$\int_{[0,R]} \rho^3 d\rho = \lim_{N \rightarrow \infty} \Sigma_N = \frac{R^4}{4},$$

so daß wir schließlich erhalten:

$$\Theta = \frac{\pi h R^4}{2}.$$

○

- Wir betrachten eine Kurve

$$\gamma: t \mapsto \mathbf{z}(t) = (x(t), y(t)) \quad (a \leq t \leq b)$$

in der Ebene, wobei wir die Funktion $\mathbf{z}(\cdot)$ stetig differenzierbar voraussetzen wollen. Um an die Länge $L(\gamma)$ dieser Kurve heranzukommen, gehen wir folgendermaßen vor:

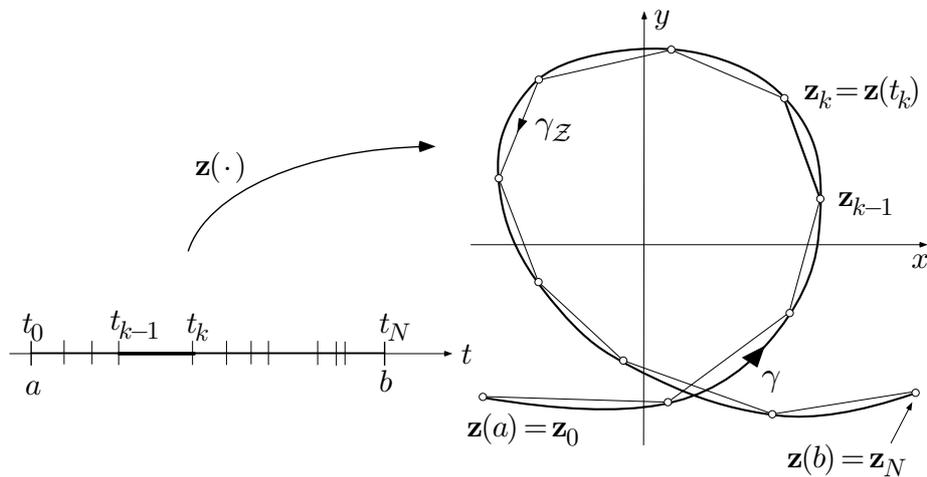


Fig. 4.1.26

Wir zerlegen das Intervall $[a, b]$ durch Teilungspunkte

$$\mathcal{Z} : \quad a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$$

in kleine Teilintervalle

$$I_k := [t_{k-1}, t_k] \quad (1 \leq k \leq N)$$

und verbinden die zu den t_k gehörigen Kurvenpunkte $\mathbf{z}(t_k) =: \mathbf{z}_k$ der Reihe nach durch einen Streckenzug $\gamma_{\mathcal{Z}}$ (Fig. 4.1.26). Die Länge $L(\gamma_{\mathcal{Z}})$ dieses Streckenzugs ist ein Näherungswert für die gesuchte Länge $L(\gamma)$.

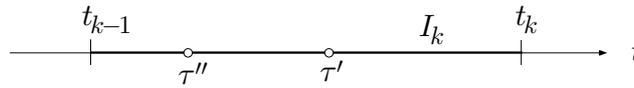


Fig. 4.1.27

Betrachten wir eine Teilstrecke

$$\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_{k-1} = (x(t_k) - x(t_{k-1}), y(t_k) - y(t_{k-1})),$$

so gibt es nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, Version **(3.6)**, Punkte $\tau', \tau'' \in [t_{k-1}, t_k]$ (siehe die Fig. 4.1.27) mit

$$x(t_k) - x(t_{k-1}) = \dot{x}(\tau')(t_k - t_{k-1}), \quad y(t_k) - y(t_{k-1}) = \dot{y}(\tau'')(t_k - t_{k-1}),$$

und wir erhalten für die Länge dieser Teilstrecke:

$$|\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_{k-1}| = \sqrt{\dot{x}^2(\tau') + \dot{y}^2(\tau'')}(t_k - t_{k-1}) = (\sqrt{\dot{x}^2(t_k) + \dot{y}^2(t_k)} + \Delta_k) \mu(I_k),$$

wobei der beim Ersatz $\tau' \rightarrow t_k, \tau'' \rightarrow t_k$ eingebrachte Fehler Δ_k mit $\delta(\mathcal{Z}) \rightarrow 0$ gegen 0 geht, da $\dot{x}(\cdot)$ und $\dot{y}(\cdot)$ stetig vorausgesetzt wurden. Wir erhalten daher unter Vernachlässigung der Δ_k :

$$\begin{aligned} L(\gamma_{\mathcal{Z}}) &= \sum_{k=1}^N |\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_{k-1}| \doteq \sum_{k=1}^N \sqrt{\dot{x}^2(t_k) + \dot{y}^2(t_k)} \mu(I_k) \\ &\doteq \int_{[a,b]} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt. \end{aligned}$$

Das ist präzise folgendermaßen zu interpretieren: Ist eine Toleranz $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so haben alle der Kurve einbeschriebenen Streckenzüge $\gamma_{\mathcal{Z}}$ mit hinreichend feinem Korn

$$\delta(\mathcal{Z}) := \max_{1 \leq k \leq N} (t_k - t_{k-1})$$

eine Länge $L(\gamma_{\mathcal{Z}})$, die sich von dem angeschriebenen Integral um weniger als ε unterscheidet. Wir definieren daher dieses Integral als **Länge der Kurve** γ :

$$L(\gamma) := \int_{[a,b]} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt . \quad (15)$$

Der von den obigen Überlegungen inspirierte formale Ausdruck

$$ds := \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$$

wird als **Linielement** bezeichnet.

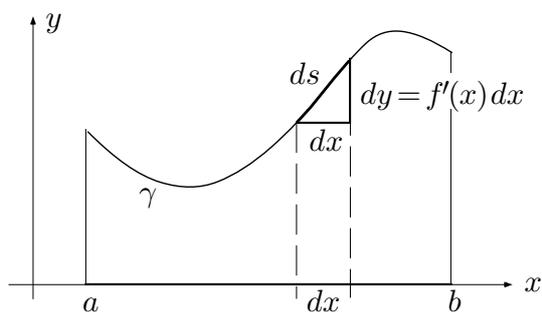


Fig. 4.1.28

Ist die Kurve γ als Graph einer Funktion vorgelegt:

$$\gamma: \quad y = f(x) \quad (a \leq x \leq b) ,$$

so verwandeln wir das zunächst in die Parameterdarstellung

$$\gamma: \quad x \mapsto (x, f(x)) \quad (a \leq x \leq b)$$

mit der Variablen x als Parameter und wenden dann (15) an. Es ergibt sich

$$L(\gamma) = \int_{[a,b]} \sqrt{1 + f'^2(x)} dx . \quad (16)$$

Die stenographische Herleitung dieser Formel erfolgt anhand der Figur 4.1.28, die unmittelbar das hier maßgebende Linielement

$$ds = \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

liefert.

Aufgaben

1. (M) Berechne einen Näherungswert für das Integral

$$\int_0^2 e^{-t^2/2} dt$$

mit Hilfe einer Zerlegung des Intervalls $[0, 2]$ in 20 gleiche Teile. Schätze den Fehler ab und vergleiche mit dem Tabellenwert.

2. Berechne die folgenden Integrale durch Betrachtung von Riemannschen Summen:

$$(a) \int_0^c x dx, \quad (b) \int_a^b e^{\lambda x} dx, \quad \lambda \in \mathbb{C}_{\neq 0}.$$

Mit Hilfe von (b) lassen sich leicht auch die folgenden Integrale berechnen:

$$(c) \int_a^b \cos x dx, \quad (d) \int_a^b \sin x dx.$$

3. Berechne das Trägheitsmoment eines senkrechten Kreiskegels K (Grundkreisradius R , Höhe h , Dichte $m^* := 1$) bezüglich seiner Achse

- (a) mit Hilfe einer Zerlegung von K in flache zylindrische Scheiben,
 (b) mit Hilfe einer Zerlegung von K in dünnwandige zylindrische Hülsen.

4. Über drei Einheitskreisen werden eine Halbkugel, ein Kreiskegel der Höhe 1 und ein Zylinder der Höhe 1 errichtet. Wird der Kegel auf die Spitze gestellt, so schneidet jede waagrechte Ebene die drei Körper in drei Kreisen, deren Flächeninhalte zueinander in einer einfachen Beziehung stehen. Aus diesem Sachverhalt läßt sich die Formel für das Kugelvolumen herleiten, wenn die entsprechenden Formeln für Kegel und Zylinder als bekannt vorausgesetzt werden.

5. Die Kurve

$$\gamma: \quad \rho = f(z) \quad (a \leq z \leq b)$$

erzeugt bei Rotation um die z -Achse eine Rotationsfläche S . Leite eine Formel her für den Flächeninhalt $\omega(S)$. (*Hinweis:* Zerlege S in "infinitesimale Lampenschirme".)

6. Besitzt der Bereich $B \subset \mathbb{R}^2$ den Durchmesser δ , so ist $\mu(B) \leq \delta^2$. Beweise dies und versuche, die Ungleichung noch zu verbessern: $\mu(B) \leq c\delta^2$ für ein geeignetes $c < 1$.

7. Jemand zeichnet auf die 2-Sphäre vom Radius R mit Zentrum $\mathbf{0}$ eine glatte Kurve γ der Länge L . Wird jeder Punkt von γ mit $\mathbf{0}$ durch eine Strecke verbunden, so entsteht eine Fläche M .

- (a) Beschreibe M als Menge, d.h. in der Form $M = \{\dots | \dots\}$.
 (b) Bestimme den Flächeninhalt von M oder begründe, warum die gemachten Angaben hierzu nicht ausreichen.

4.2 Hauptsätze

Grundeigenschaften des Integrals, Mittelwertsatz

Das Riemannsche Integral 4.1.(7) besitzt offensichtlich die zu Beginn von Abschnitt 4.1 postulierten Eigenschaften (a)–(d). Wir dürfen daher ohne weiteren Beweis notieren:

$$(4.1)(a) \quad \int_B (f + g) d\mu = \int_B f d\mu + \int_B g d\mu ,$$
$$\int_B (\lambda f) d\mu = \lambda \int_B f d\mu \quad (\lambda \in \mathbb{R} \text{ bzw. } \in \mathbb{C}) .$$

(b) Sind B_1 und B_2 fast disjunkt, so gilt

$$\int_{B_1 \cup B_2} f d\mu = \int_{B_1} f d\mu + \int_{B_2} f d\mu .$$

$$(c) \quad \int_B 1 d\mu = \mu(B) .$$

Weiter haben wir die folgenden Abschätzungen:

$$(4.2)(a) \quad \left| \int_B f(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) \right| \leq \int_B |f(\mathbf{x})| d\mu(\mathbf{x}) ;$$

(b) Gilt $|f(\mathbf{x})| \leq M$ für alle $\mathbf{x} \in B$, so ist

$$\left| \int_B f(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) \right| \leq M \mu(B) .$$

□ Die behaupteten Ungleichungen gelten für beliebige Riemannsche Summen:

$$\left| \sum_{k=1}^N f(\mathbf{x}_k) \mu(B_k) \right| \leq \sum_{k=1}^N |f(\mathbf{x}_k)| \mu(B_k) \quad \left(\leq \sum_{k=1}^N M \mu(B_k) = M \mu(B) \right) ,$$

und folglich auch im Limes. ┘

Für reellwertige Funktionen gibt es den **Mittelwertsatz der Integralrechnung**:

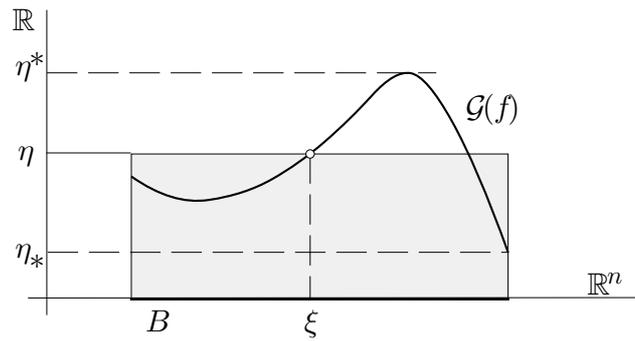


Fig. 4.2.1

(4.3) Nimmt die Funktion $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ jeden Wert zwischen $\eta_* := \inf_{\mathbf{x} \in B} f(\mathbf{x})$ und $\eta^* := \sup_{\mathbf{x} \in B} f(\mathbf{x})$ tatsächlich an, so gibt es einen Punkt $\xi \in B$ mit

$$\int_B f \, d\mu = f(\xi) \mu(B) .$$

□ Für alle $\mathbf{x} \in B$ ist

$$\eta_* \leq f(\mathbf{x}) \leq \eta^*$$

(Fig. 4.2.1). Hieraus folgt

$$\int_B \eta_* \, d\mu(\mathbf{x}) \leq \int_B f(\mathbf{x}) \, d\mu(\mathbf{x}) \leq \int_B \eta^* \, d\mu(\mathbf{x})$$

und somit

$$\eta_* \mu(B) \leq \int_B f \, d\mu \leq \eta^* \mu(B) .$$

Wegen $\mu(B) > 0$ ist das äquivalent mit

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B f \, d\mu =: \eta \in [\eta_*, \eta^*] .$$

Nach Voraussetzung über f gibt es jetzt einen Punkt $\xi \in B$ mit $f(\xi) = \eta$; dieses ξ genügt. □

Das Integral als Funktion der oberen Grenze

Wir benötigen eine allgemeine Methode zur Berechnung von Integralen, wenn die zu integrierende Funktion f als Ausdruck und der Integrationsbereich B

durch Ungleichungen gegeben sind. Im vorliegenden Abschnitt behandeln wir den eindimensionalen Fall. Hier führt die entscheidende Idee, das Integral

$$\int_{[a,x]} f(t) dt$$

als Funktion der oberen Grenze x zu betrachten, zum Hauptsatz der Infinitesimalrechnung und damit zum Kalkül mit Stammfunktionen. Später werden wir zeigen, daß sich bei Integralen über mehrdimensionale Bereiche die Dimension rekursiv erniedrigen läßt, so daß schließlich eine verschachtelte Folge von einfachen Integralen auszuwerten ist.

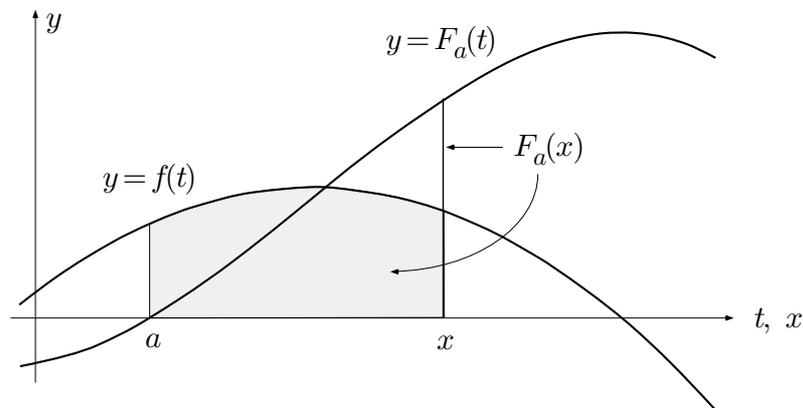


Fig. 4.2.2

Es seien also $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall,

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto y := f(t)$$

eine stetige Funktion und $a \in I$ ein fest gewählter Punkt. Betrachte die auf ganz I definierte Funktion

$$F_a(x) := \begin{cases} \int_{[a,x]} f(t) dt & (x \geq a) \\ -\int_{[x,a]} f(t) dt & (x \leq a) \end{cases}$$

(Fig. 4.2.2). Man sagt, man habe f von a aus **aufintegriert**, und nennt $F_a(\cdot)$ aus naheliegenden Gründen die zum Anfangspunkt a gehörige **Flächenfunktion** von f . Diese Funktion besitzt folgende charakteristische Eigenschaft (siehe die Fig. 4.2.3):

$$F_a(x_2) - F_a(x_1) = \int_{[x_1,x_2]} f(t) dt \quad (x_1, x_2 \in I; x_1 < x_2). \quad (1)$$

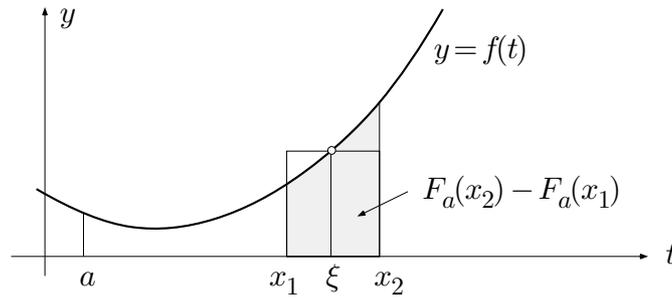


Fig. 4.2.3

□ Ist zum Beispiel $a \leq x_1 < x_2$, so folgt mit (4.1)(b):

$$\int_{[a, x_2]} f(t) dt = \int_{[a, x_1]} f(t) dt + \int_{[x_1, x_2]} f(t) dt,$$

und das heißt

$$F_a(x_2) = F_a(x_1) + \int_{[x_1, x_2]} f(t) dt.$$

Ähnlich schließt man in den Fällen $x_1 < a \leq x_2$ und $x_1 < x_2 \leq a$. □

Wir wenden nun auf die rechte Seite von (1) den Mittelwertsatz (4.3) an: Es gibt einen Punkt ξ im Intervall $[x_1, x_2]$ mit

$$F_a(x_2) - F_a(x_1) = f(\xi)(x_2 - x_1),$$

und das ist äquivalent mit

$$\frac{F_a(x_2) - F_a(x_1)}{x_2 - x_1} = f(\xi), \quad x_1 \leq \xi \leq x_2.$$

Lassen wir hier bei festem $x_1 \in I$ den Punkt x_2 von rechts gegen x_1 streben, so strebt auch der Punkt ξ gegen x_1 , und weil f dort stetig ist, folgt

$$F'_a(x_1+) = f(x_1).$$

Analog zeigt man $F'_a(x_2-) = f(x_2)$. Da $x_1, x_2 \in I$ beliebig waren, haben wir damit allgemein bewiesen:

$$\frac{d}{dx} F_a(x) = f(x) \quad (x \in I).$$

Dies ist der **Hauptsatz der Infinitesimalrechnung** (Version A):

(4.4) Die Ableitung der Flächenfunktion $F_a(\cdot)$ ist die Ausgangsfunktion $f(\cdot)$; in Formeln:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \int_{[a,x]} f(t) dt &= f(x) & (x \geq a), \\ \frac{d}{dx} \int_{[x,a]} f(t) dt &= -f(x) & (x \leq a).\end{aligned}$$

Stammfunktionen

Ist eine stetige Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ (bzw. $\rightarrow \mathbb{C}$) die Ableitung einer anderen Funktion $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ (bzw. $\rightarrow \mathbb{C}$), so heißt F eine **Stammfunktion** von f auf I . Die Menge aller Stammfunktionen von $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **unbestimmtes Integral** von f und wird mit

$$\int f(t) dt$$

bezeichnet. Diese Menge ist nicht leer: Man wähle einen Punkt $a \in I$ und bilde die Flächenfunktion $F_a(\cdot)$. Wie wir gleich zeigen werden, stimmen die einzelnen Mitglieder der Funktionenschar $\int f(t) dt$ bis auf eine additive Konstante überein. In diesem Zusammenhang hat sich folgende Schreibweise eingebürgert: Ist F_0 eine beliebige Funktion bzw. $F_0(t)$ ein Funktionsterm in der Variablen t , so bezeichnet

$$F_0 + \text{const.} \quad \text{bzw.} \quad F_0(t) + \text{const.}$$

die Menge aller Funktionen bzw. Ausdrücke, die sich von F_0 um eine konstante Funktion unterscheiden.

(4.5) Gilt $F'_0 = f$, so ist die Menge aller Stammfunktionen von f gegeben durch $F_0 + \text{const.}$; in Formeln:

$$F'_0 = f \quad \implies \quad \int f(t) dt = F_0 + \text{const.} .$$

□ F_0 ist nach Voraussetzung eine Stammfunktion von f . Dann sind auch alle Funktionen $F_0 + C$, $C \in \mathbb{R}$, Stammfunktionen von f . Umgekehrt: Sei F eine beliebige Stammfunktion von f . Dann ist

$$(F - F_0)' = f - f = 0,$$

und hieraus folgt mit Satz (3.8), daß $F - F_0$ konstant ist. □

Satz (4.5) verwandelt jede Differentiationsregel in eine Integrationsregel, wie wir noch sehen werden.

$$\begin{aligned} \text{Bsp : } \quad \frac{d}{dt} \arctan t = \frac{1}{1+t^2} &\quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan t + \text{const.}; \\ \sinh' = \cosh &\quad \Longrightarrow \quad \int \cosh t dt = \sinh t + \text{const.} . \end{aligned}$$

Wir kehren nunmehr zurück zum Problem der Berechnung von Riemannschen Integralen

$$\int_{[a,b]} f(t) dt$$

und bringen den **Hauptsatz der Infinitesimalrechnung** auf folgende anwendungsorientierte Form B:

(4.6) *Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (bzw. $\rightarrow \mathbb{C}$) eine stetige Funktion, und es sei $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (bzw. $\rightarrow \mathbb{C}$) eine beliebige Stammfunktion von f . Dann gilt*

$$\int_{[a,b]} f(t) dt = F(b) - F(a) .$$

┌ Da sich verschiedene Stammfunktionen von f nur um eine additive Konstante unterscheiden, hat hier die Differenz rechter Hand für alle Stammfunktionen denselben Wert, und wir dürfen annehmen, F sei die in Satz (4.5) als Stammfunktion erwiesene Flächenfunktion

$$F_a(x) := \int_{[a,x]} f(t) dt \quad (x \geq a) .$$

Für diese gilt aber wegen $F_a(a) = 0$ tatsächlich

$$\int_{[a,b]} f(t) dt = F_a(b) = F_a(b) - F_a(a) . \quad \text{┐}$$

Satz (4.6) stellt ein Riemannsches Integral, das heißt: einen Grenzwert von Riemannschen Summen, als Differenz von Funktionswerten einer Stammfunktion dar und macht damit die Berechnung derartiger Integrale einem allgemeinen und letzten Endes algebraischen Kalkül zugänglich. Das Problem ist damit auf eine andere Ebene geschoben worden: Wir müssen nicht mehr mit irgendwelchen Tricks einen Grenzwert ausrechnen (siehe die Beispiele 4.1.② und 4.1.③); dafür entsteht neu die Aufgabe, zu einem gegebenen Funktionsterm $f(t)$ eine Stammfunktion $F(t)$ zu finden.

Da im Zusammenhang mit Integralen immer wieder Differenzen $F(b) - F(a)$ berechnet werden müssen, hat sich dafür die bequeme Schreibweise

$$F(b) - F(a) =: F(t) \Big|_a^b \quad (\text{o. ä.})$$

eingebürgert. Will man ausdrücken, daß diese Differenz für eine (unter Umständen noch nicht bekannte) Stammfunktion von f berechnet werden soll, so schreibt man dafür

$$\int_a^b f(t) dt .$$

Dieser Ausdruck ist das **bestimmte Integral der Funktion f von a bis b** .

Wir wiederholen: Unter dem *unbestimmten* Integral

$$\int f(t) dt$$

versteht man die Menge aller Stammfunktionen von f auf einem vereinbarten Intervall I ; das *bestimmte* Integral

$$\int_a^b f(t) dt$$

hingegen ist die für irgendeine Stammfunktion F von f berechnete Differenz $F(b) - F(a)$, und zwar ist das auch für $b < a$ definiert.

Aufgrund dieser Vereinbarungen erhält Satz (4.6) die (nur scheinbar tautologische) Form

(4.6')

$$\int_{[a,b]} f(t) dt = \int_a^b f(t) dt \quad (a \leq b) .$$

Angesichts dieser Formel benutzen wir für Riemannsche Integrale über ein Intervall $[a, b]$ die Schreibweise

$$\int_{[a,b]} f(t) dt$$

nicht mehr, sondern wir schreiben dafür ebenfalls

$$\int_a^b f(t) dt ,$$

wie das ja allgemein üblich ist.

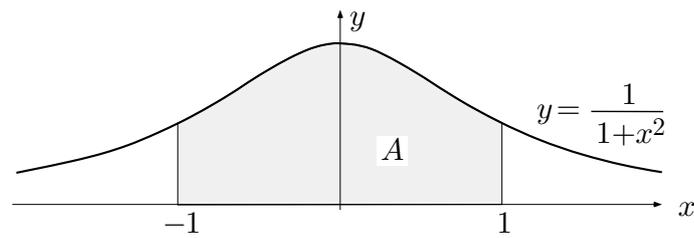


Fig. 4.2.4

① Wir berechnen erstens den Flächeninhalt A unter der Kurve

$$y = \frac{1}{1+x^2} \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

(Fig. 4.2.4). — Es ergibt sich

$$A = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Zweitens soll die Länge der sogenannten **Kettenlinie**

$$\gamma: \quad y = \cosh x \quad (-a \leq x \leq a)$$

(Fig. 4.2.5) berechnet werden. — Nach 4.1.(16) ist

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_{-a}^a \sqrt{1 + \cosh^2 x} dx = \int_{-a}^a \sqrt{1 + \sinh^2 x} dx \\ &= \int_{-a}^a \cosh x dx = \sinh x \Big|_{-a}^a = 2 \sinh a. \end{aligned}$$

○

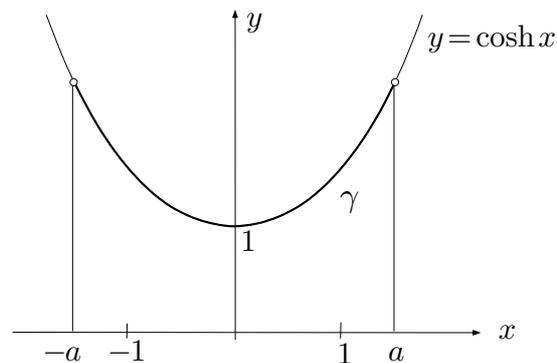


Fig. 4.2.5

Aufgaben

1. Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige 2π -periodische Funktion. Unter welcher Bedingung sind die Stammfunktionen von f ebenfalls 2π -periodisch? Man zeige, daß die gefundene Bedingung notwendig und hinreichend ist.
2. (a) \textcircled{M} Zeichne den Graphen der Funktion

$$f(t) := \frac{\sin t}{t} \quad (t \neq 0), \quad f(0) := 1 .$$

- (b) Überlege: Die zugehörige Flächenfunktion

$$F(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

nimmt auf \mathbb{R} ein globales Maximum M und ein globales Minimum $-M$ an.

- (c) Finde einen Ausdruck für M und beweise $M < 2$. (*Hinweis:* Beweise und verwende die Ungleichung $\sin t < t \cos(t/2)$ ($0 < t < \pi$)).
3. Es bezeichne L die Flächenfunktion

$$L(x) := \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad (x \geq 1) .$$

Zeige: L genügt der Funktionalgleichung

$$L(uv) \equiv L(u) + L(v) \quad (u \geq 1, v \geq 1) .$$

Dabei dürfen nur allgemeine Eigenschaften des Flächeninhalts (Zerlegungsadditivität, Verhalten gegenüber Streckung in x - bzw. y -Richtung usw.), nicht aber anderweitig bekannte Eigenschaften des Logarithmus verwendet werden. Figur!

4.3 Technik des Integrierens

Wir stehen vor der Aufgabe, eine als Ausdruck gegebene Funktion, zum Beispiel

$$f(t) := \sqrt{t^2 + 1},$$

unbestimmt zu integrieren, das heißt: einen Funktionsterm $F(t)$ anzugeben, dessen Ableitung $F'(t)$, gerechnet nach den Regeln von Abschnitt 3.1, mit $f(t)$ übereinstimmt. Diese Aufgabe ist nicht immer lösbar; es gibt nämlich elementare Funktionen,

$$\text{Bsp :} \quad \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 t}, \quad e^{-t^2/2}, \quad \frac{\sin t}{t}, \quad \frac{t}{\log t},$$

deren Stammfunktionen nicht elementar sind. Die angeführten Beispiele sind real: Das Integral $\int \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 t} dt$ wird für die Bogenlänge der Ellipse benötigt; Integrale $\int e^{-t^2/2} dt$ spielen eine prominente Rolle in der Wahrscheinlichkeitstheorie, und $\sin t/t$ ist eine Standardfunktion in der Theorie der Signalverarbeitung. Bezeichnet $\pi(t)$ die Anzahl der Primzahlen $\leq t$, so gilt

$$\pi(t) = \frac{t}{\log t} (1 + o(1)) \quad (t \rightarrow \infty).$$

Wir stellen im folgenden einige Regeln zusammen, mit denen man in den meisten Fällen durchkommt. Es gibt aber auch umfangreiche Integraltafeln, zum Beispiel

I. S. Gradshteyn + I. M. Ryzhik: Table of Integrals, Series and Products. 4th ed., 1965 (Academic Press).

Grundformeln

Die nachstehenden Formeln lassen sich ohne weiteres mit Hilfe von Satz (4.5), das heißt: durch Ableiten der rechten Seite verifizieren:

- $$\int t^n dt = \frac{1}{n+1} t^{n+1} + \text{const.} \quad (n \in \mathbb{Z}, n \neq -1).$$
- $$\int t^\alpha dt = \frac{1}{\alpha+1} t^{\alpha+1} + \text{const.} \quad (t > 0; \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1).$$
- $$\int e^{\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} + \text{const.} \quad (\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0).$$

- $\int \cosh t \, dt = \sinh t + \text{const.}, \quad \int \sinh t \, dt = \cosh t + \text{const.} .$
- $\int \cos t \, dt = \sin t + \text{const.}, \quad \int \sin t \, dt = -\cos t + \text{const.} .$
- $\int \frac{1}{1+t^2} \, dt = \arctan t + \text{const.} .$
- $\int \frac{1}{1-t^2} \, dt = \text{artanh } t + \text{const.} = \frac{1}{2} \log \frac{1+t}{1-t} + \text{const.} \quad (-1 < t < 1) .$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \, dt = \arcsin t + \text{const.} .$
- $\int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} \, dt = \text{arcosh } t + \text{const.} = \log(t + \sqrt{t^2-1}) + \text{const.} \quad (t > 1) .$
- $\int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \, dt = \text{arsinh } t + \text{const.} = \log(t + \sqrt{t^2+1}) + \text{const.} .$

(4.7) Ist $f(t) \neq 0$ auf dem Intervall I , so gilt dort

$$\int \frac{f'(t)}{f(t)} \, dt = \log |f(t)| + \text{const.} .$$

┌ Nach Voraussetzung über f gibt es ein festes $\sigma \in \{-1, 1\}$ mit $|f(t)| \equiv \sigma f(t)$. Die Ableitung der Funktion

$$F(t) := \log |f(t)| = \log(\sigma f(t))$$

ist somit nach der Kettenregel gegeben durch

$$\begin{aligned} F'(t) &= \log'(\sigma f(t)) \cdot \sigma f'(t) = \frac{1}{\sigma f(t)} \sigma f'(t) \\ &= \frac{f'(t)}{f(t)} . \end{aligned} \quad \lrcorner$$

① Es gilt

$$\int \frac{1}{t} \, dt = \begin{cases} \log t + \text{const.} & (\text{auf } \mathbb{R}_{>0}), \\ \log(-t) + \text{const.} & (\text{auf } \mathbb{R}_{<0}). \end{cases}$$

Die Sinusfunktion ist auf dem Intervall $]0, \pi[$ positiv; folglich gilt dort

$$\int \cot t \, dt = \int \frac{\cos t}{\sin t} \, dt = \log(\sin t) + \text{const.} .$$

Analog: Die Cosinusfunktion ist auf dem Intervall $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ positiv; folglich gilt dort

$$\int \tan t \, dt = - \int \frac{-\sin t}{\cos t} \, dt = -\log(\cos t) + \text{const.} .$$

○

Wir benötigen weiter gewisse Regeln, die gestatten, kompliziertere Ausdrücke auf einfachere zurückzuführen. Folgendes ist fast selbstverständlich:

$$\int (f(t) + g(t)) \, dt = \int f(t) \, dt + \int g(t) \, dt ,$$

$$\int (\lambda f(t)) \, dt = \lambda \int f(t) \, dt ;$$

dabei haben wir allerdings stillschweigend benutzt, daß man Funktionenscharen $F_0 + \text{const.}$ wie einzelne Funktionen sinnvoll addieren und mit Skalaren multiplizieren kann. Im gleichen Zug notieren wir auch noch die Regeln

$$\int \text{Re } f(t) \, dt = \text{Re} \int f(t) \, dt , \quad \int \text{Im } f(t) \, dt = \text{Im} \int f(t) \, dt .$$

Partielle Integration

Aus der Formel für die Ableitung eines Produkts ergibt sich der Satz über die **partielle Integration**:

$$(4.8)(a) \quad \int u(t)v'(t) \, dt = u(t)v(t) - \int u'(t)v(t) \, dt ,$$

$$(b) \quad \int_a^b u(t)v'(t) \, dt = u(t)v(t) \Big|_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) \, dt .$$

□ Aus $(uv)' = u'v + uv'$ folgt mit Satz (4.5):

$$\int (u'(t)v(t) + u(t)v'(t)) \, dt = u(t)v(t) + \text{const.} .$$

Hier darf man die linke Seite aufspalten und den einen Summanden nach rechts bringen. ┘

Die folgenden Beispiele zeigen die praktische Anwendung der partiellen Integration. Das Ziel ist immer, rechter Hand ein Integral zu bekommen, das einfacher ist, als das Ausgangsintegral war. Dabei erweist es sich als zweckmäßig,

im Ausgangsintegral den Faktor, der im Verlauf der Rechnung *differenziert* wird, mit einem nach unten weisenden Pfeil ‘ \downarrow ’ und den Faktor, der *integriert* wird, mit einem nach oben weisenden Pfeil ‘ \uparrow ’ zu bezeichnen.

② Bei Integralen vom Typus

$$\int t^n e^{\lambda t} dt, \quad \int t^n \cos t dt, \quad \int t^n \sin t dt \quad (n \in \mathbb{N})$$

läßt sich der auftretende Exponent durch partielle Integration um eins erniedrigen und somit rekursiv auf 0 bringen:

$$\begin{aligned} \int \underset{\downarrow}{t^n} \underset{\uparrow}{e^{\lambda t}} dt &= t^n \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} - \int n t^{n-1} \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} dt \\ &= \frac{1}{\lambda} t^n e^{\lambda t} - \frac{n}{\lambda} \int t^{n-1} e^{\lambda t} dt . \end{aligned}$$

Ähnliches gilt für die beiden anderen Typen. ○

③ Um das Integral $\int \log t dt$ zu berechnen, führen wir formal einen Faktor 1 ein und integrieren partiell:

$$\begin{aligned} \int \log t dt &= \int \underset{\uparrow}{1} \underset{\downarrow}{\log t} dt = t \log t - \int t \frac{1}{t} dt = t \log t - t + \text{const.} \\ &= t(\log t - 1) + \text{const.} . \end{aligned} \quad \text{○}$$

④ Um das unbestimmte Integral

$$J := \int e^{\alpha t} \cos(\beta t) dt$$

zu berechnen, werden wir zweimal hintereinander partiell integrieren; wir dürfen dabei $\alpha \neq 0$ voraussetzen:

$$\begin{aligned} J &= \int \underset{\uparrow}{e^{\alpha t}} \underset{\downarrow}{\cos(\beta t)} dt = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \cos(\beta t) - \int \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} (-\beta) \sin(\beta t) dt \\ &= \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \frac{\beta}{\alpha^2} e^{\alpha t} \sin(\beta t) - \int \frac{\beta}{\alpha^2} e^{\alpha t} \beta \cos(\beta t) dt \\ &= \frac{1}{\alpha^2} e^{\alpha t} \left(\alpha \cos(\beta t) + \beta \sin(\beta t) \right) - \frac{\beta^2}{\alpha^2} J . \end{aligned}$$

Der Mißerfolg ist nur scheinbar: Wir können nach J auflösen und erhalten

$$\int e^{\alpha t} \cos(\beta t) dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha \cos(\beta t) + \beta \sin(\beta t)) . \quad (1)$$

Das ganze nochmal von vorn, aber einfacher: Aus

$$\int e^{(\alpha+i\beta)t} dt = \frac{1}{\alpha+i\beta} e^{(\alpha+i\beta)t} = \frac{\alpha-i\beta}{\alpha^2+\beta^2} e^{(\alpha+i\beta)t}$$

folgt durch Trennung von Real- und Imaginärteil sofort (1) sowie zusätzlich

$$\int e^{\alpha t} \sin(\beta t) dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha \sin(\beta t) - \beta \cos(\beta t)) .$$

○

⑤ Wir wollen die Zahlen

$$c_n := \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt \quad (n \in \mathbb{N})$$

berechnen. Zunächst ist

$$c_0 = \int_0^{\pi/2} 1 dt = \frac{\pi}{2}, \quad c_1 = \int_0^{\pi/2} \cos t dt = \sin t \Big|_0^{\pi/2} = 1 .$$

Um eine Rekursionsformel für die c_n zu erhalten, schreiben wir

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} t \cos t dt \\ &\quad \downarrow \quad \uparrow \\ &= \cos^{n-1} t \sin t \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (n-1) \cos^{n-2} t (-\sin t) \sin t dt \\ &= 0 + (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} t (1 - \cos^2 t) dt \\ &= (n-1)(c_{n-2} - c_n) . \end{aligned}$$

Hieraus folgt $nc_n = (n-1)c_{n-2}$, das heißt:

$$c_n = \frac{n-1}{n} c_{n-2} \quad (n \geq 2) . \quad (2)$$

Ist n gerade, das heißt $n = 2m$, so endet der iterative Abstieg bei 0, und wir erhalten

$$c_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot c_0$$

oder andersherum:

$$c_{2m} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2m-1}{2m} \quad (m \geq 1) .$$

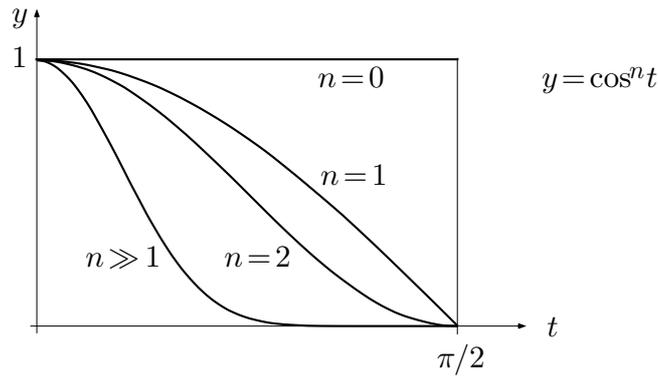


Fig. 4.3.1

Ist jedoch n ungerade, das heißt $n = 2m + 1$, so ergibt sich in analoger Weise

$$c_{2m+1} = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2m}{2m+1} \quad (m \geq 1).$$

Mit Hilfe der c_n können wir noch eine "klassische" Darstellung der Zahl π herleiten. Aus den Ungleichungen

$$\cos^{2m} t \geq \cos^{2m+1} t \geq \cos^{2m+2} t \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

(Fig. 4.3.1) und (2) folgt

$$c_{2m} \geq c_{2m+1} \geq c_{2m+2} = \frac{2m+1}{2m+2} c_{2m}.$$

Wir dividieren mit c_{2m} und erhalten

$$1 \geq \frac{c_{2m+1}}{c_{2m}} \geq \frac{2m+1}{2m+2} = 1 - \frac{1}{2m+2};$$

somit gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{c_{2m+1}}{c_{2m}} = 1. \quad (3)$$

Nun ist aber

$$\frac{c_{2m+1}}{c_{2m}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2m}{2m-1} \cdot \frac{2m}{2m+1},$$

so daß (3) die folgende Produktdarstellung von $\pi/2$ nach sich zieht:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \dots$$

Dies ist das sogenannte **Wallische Produkt**. Für die numerische Berechnung von π taugt es natürlich nicht. Man braucht es zum Beispiel, um die Konstante $\sqrt{2\pi}$ in die Stirlingsche Formel für $n!$ hineinzuzaubern. \bigcirc

Substitution

Die Kettenregel liefert fürs Integrieren zwei Varianten der sogenannten **Substitution**. Die erste Substitutionsregel ist anwendbar auf Integranden, die schon von vorneherein als Opfer der Kettenregel erkennbar sind.

Bsp: Die Funktion

$$g(t) := (\sin^3 t + e^{\sin t}) \cos t$$

ist offensichtlich die Ableitung der Funktion

$$G(t) := \frac{1}{4} \sin^4 t + e^{\sin t} .$$

$$(4.9)(a) \quad \int f(\phi(t)) \phi'(t) dt = \left(\int f(x) dx \right)_{x:=\phi(t)} ,$$

$$(b) \quad \int_a^b f(\phi(t)) \phi'(t) dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx .$$

Hier liefert (a) die in der Variablen t ausgedrückten Stammfunktionen des Integranden, während (b) von bestimmten Integralen handelt. Bei bestimmten Integralen entfällt die Rücktransformation auf die Ausgangsvariable, dafür sind die Integrationsgrenzen mitzutransformieren. — Um Ausdrücke der Form $f(\phi(t)) \phi'(t)$ zu integrieren, hat man nach Satz (4.9) folgendermaßen vorzugehen:

(a) *Unbestimmtes Integral*

1. Substituiere formal $\phi(t) := x$, $\phi'(t) dt := dx$.
2. Integriere unbestimmt nach x .
3. Ersetze x wieder durch $\phi(t)$.

(b) *Bestimmtes Integral*

1. Substituiere formal $\phi(t) := x$, $\phi'(t) dt := dx$.
2. Ersetze die t -Grenzen a , b durch die x -Grenzen $\phi(a)$, $\phi(b)$.
3. Integriere.

□ (Beweis von (4.9)) Es sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Dann ist $F(\phi(t))$ eine Stammfunktion von $f(\phi(t)) \phi'(t)$. Somit sind beide Seiten von (a) gleich

$$F(\phi(t)) + \text{const.}$$

und beide Seiten von (b) gleich

$$F(\phi(b)) - F(\phi(a)) .$$

□

⑥ Bei dem unbestimmten Integral

$$J := \int \frac{3t + 2}{(3t^2 + 4t + 2)^{5/2}} dt$$

erkennen wir $\phi(t) := 3t^2 + 4t + 2$, $\phi'(t) = 6t + 4$ und substituieren daher

$$3t^2 + 4t + 2 := x, \quad (6t + 4) dt := dx. \quad (4)$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} J &= \left(\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^{5/2}} \right)_{x:=3t^2+4t+2} = \left(\frac{1}{2} \frac{-2/3}{x^{3/2}} \right)_{x:=3t^2+4t+2} + \text{const.} \\ &= -\frac{1}{3(3t^2 + 4t + 2)^{3/2}} + \text{const.} . \end{aligned}$$

Bei dem bestimmten Integral

$$\int_{-1}^1 \frac{3t + 2}{(3t^2 + 4t + 2)^{5/2}} dt$$

liefert dieselbe Substitution (4) die zu den t -Grenzen -1 und 1 gehörigen x -Grenzen 1 und 9 , so daß wir folgendes erhalten:

$$\int_{-1}^1 \frac{3t + 2}{(3t^2 + 4t + 2)^{5/2}} dt = \frac{1}{2} \int_1^9 \frac{dx}{x^{5/2}} = \frac{1}{2} \frac{-2/3}{x^{3/2}} \Big|_1^9 = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{27} - 1 \right) = \frac{26}{81} .$$

○

⑦ Das Integral

$$J := \int (\cos t + \cos^3 t) dt$$

hat auf den ersten Blick nicht die hier benötigte Form. Nun ist aber

$$J = \int (1 + \cos^2 t) \cos t dt = \int (2 - \sin^2 t) \cos t dt ,$$

und wir sehen, daß die Substitution

$$\sin t := x, \quad \cos t dt := dx \quad (5)$$

zum Ziel führt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} J &= \left(\int (2 - x^2) dx \right)_{x:=\sin t} = \left(2x - \frac{x^3}{3} \right)_{x:=\sin t} + \text{const.} \\ &= 2 \sin t - \frac{1}{3} \sin^3 t + \text{const.} . \end{aligned}$$

Der fortgeschrittene Rechner wird natürlich die Klammern $(\dots)_{x:=\sin t}$ unterdrücken.

Wenden wir dieselbe Substitution (5) auf das bestimmte Integral

$$J_0 := \int_{\pi/6}^{\pi} (\cos t + \cos^3 t) dt$$

an, so ergeben sich die x -Grenzen $\sin(\pi/6) = 1/2$ und $\sin \pi = 0$, und wir erhalten

$$J_0 = \int_{1/2}^0 (2 - x^2) dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{1/2}^0 = - \left(1 - \frac{1}{24} \right) = -\frac{23}{24} .$$

○

Die zweite Substitutionsregel ist wesentlich flexibler als die erste. Sie bezieht sich auf ganz beliebige Integrale

$$\int f(x) dx$$

und verwandelt sie mit Hilfe einer willkürlich gewählten Substitutionsfunktion $x := \phi(t)$ in

$$\int f(\phi(t)) \phi'(t) dt .$$

Dieser Ausdruck sieht nur komplizierter aus als der vorangehende, wenn man ihn mit allgemeinen Funktionen f und ϕ aufschreibt. In Wirklichkeit ist es gerade das Ziel der ganzen Operation, durch geschickte Wahl der Substitutionsfunktion ϕ dafür zu sorgen, daß das neue Integral einfacher wird. Dabei gibt es noch eine Nebenbedingung: Die Substitutionsfunktion muß in dem erforderlichen t -Intervall invertierbar sein, so daß man die Substitutionsgleichung $x := \phi(t)$ nach t auflösen, das heißt: t durch x ausdrücken kann. — Die Regel lautet:

(4.10) *Ist die Funktion ϕ in dem erforderlichen t -Intervall invertierbar, so gilt*

$$(a) \quad \int f(x) dx = \left(\int f(\phi(t)) \phi'(t) dt \right)_{t := \phi^{-1}(x)} ,$$

$$(b) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t)) \phi'(t) dt .$$

Hier bezieht sich wieder (a) auf unbestimmte und (b) auf bestimmte Integrale. Bei bestimmten Integralen entfällt wiederum die Rücktransformation auf die Ausgangsvariable, dafür sind die Integrationsgrenzen mitzutransformieren. Nach vollzogener Substitution kann man sowohl das Ausgangsintegral wie die Substitutionsfunktion vergessen und braucht nur noch das erhaltene Integral über das t -Intervall mit Endpunkten $\phi^{-1}(a)$, $\phi^{-1}(b)$ zu betrachten. — Um einen Ausdruck $f(x)$ gemäß (4.10) zu integrieren, hat man folgendermaßen vorzugehen:

(a) *Unbestimmtes Integral*

1. Wähle eine geeignete invertierbare Substitutionsfunktion ϕ .
2. Substituiere formal $x := \phi(t)$, $dx := \phi'(t)dt$.
3. Integriere unbestimmt nach t .
4. Drücke t wieder durch x aus.

(b) *Bestimmtes Integral*

1. Wähle eine geeignete invertierbare Substitutionsfunktion ϕ .
2. Substituiere formal $x := \phi(t)$, $dx := \phi'(t)dt$.
3. Ersetze die x -Grenzen a , b durch die t -Grenzen $\phi^{-1}(a)$, $\phi^{-1}(b)$.
4. Integriere.

□ (Beweis von (4.10)) Es sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Dann ist $F(\phi(t))$ eine Stammfunktion von $f(\phi(t))\phi'(t)$. Die linke Seite von (a) ist folglich gleich $F(x) + \text{const.}$, die rechte gleich

$$(F(\phi(t)) + \text{const.})_{t:=\phi^{-1}(x)} = F(\phi(\phi^{-1}(x))) + \text{const.}$$

Somit stellen beide Seiten von (a) die gleichen Funktionen von x dar. Weiter hat die linke Seite von (b) den Wert $F(b) - F(a)$, die rechte Seite den Wert $F(\phi(\phi^{-1}(b))) - F(\phi(\phi^{-1}(a)))$, was natürlich dasselbe ist. □

⑧ Als erstes berechnen wir das unbestimmte Integral

$$J_x := \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$$

Es liegt nahe, zunächst die Exponentialfunktion wegzuschaffen mit Hilfe des Ansatzes

$$e^x := t, \tag{6}$$

der aber, wohlgermerkt, die Rücksubstitution $t = \phi^{-1}(x)$ ausdrückt. Wir benötigen aber auch explizit die eigentliche Substitutionsfunktion $x = \phi(t)$; es ergibt sich

$$x = \log t, \quad dx = \frac{1}{t}dt,$$

und wir erhalten

$$J_x = \left(\int \frac{1}{\sqrt{1+t}} \frac{1}{t} dt \right)_{t:=e^x} .$$

Damit stehen wir vor der Aufgabe, das “metamorphe” Integral

$$J_t := \int \frac{1}{\sqrt{1+t}} \frac{1}{t} dt$$

weiter zu behandeln. Hierzu “substituieren wir die Wurzel”, das heißt: Wir setzen

$$\sqrt{1+t} := u, \quad (7)$$

wobei dies wiederum die Rücksubstitution $u = \psi^{-1}(t)$ ausdrückt. Die (nicht zu umgehende!) Auflösung nach t liefert

$$t = u^2 - 1, \quad dt = 2u du,$$

und es ergibt sich

$$J_t = \left(\int \frac{1}{u} \frac{1}{u^2 - 1} 2u du \right)_{u:=\sqrt{1+t}} .$$

Wir verbleiben mit dem Integral

$$\begin{aligned} J_u &= \int \frac{2}{u^2 - 1} du = \int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) du \\ &= \log |u-1| - \log |u+1| + \text{const.} = \log \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + \text{const.} \end{aligned}$$

und haben nun die Rücksubstitutionen vorzunehmen. Es ergibt sich nacheinander

$$\begin{aligned} J_t &= (J_u)_{u:=\sqrt{1+t}} = \log \left| \frac{\sqrt{1+t}-1}{\sqrt{1+t}+1} \right| + \text{const.}, \\ J_x &= (J_t)_{t:=e^x} = \log \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} + \text{const.} . \end{aligned}$$

Wäre von Anfang an nur nach dem Wert des bestimmten Integrals

$$\int_0^{\log 3} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$$

gefragt worden, so hätten dieselben Substitutionen zu dem folgenden Rechenablauf geführt:

$$\begin{aligned} \int_0^{\log 3} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} &= \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{1+t}} \frac{1}{t} dt = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{2}{u^2-1} du = \log \frac{u-1}{u+1} \Big|_{\sqrt{2}}^2 \\ &= \log \frac{2-1}{2+1} - \log \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \log \frac{1}{3} + \log \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} \right) \\ &= \log \left(1 + \frac{2}{3} \sqrt{2} \right) = 0.6641 ; \end{aligned}$$

dabei haben wir die t -Grenzen mit (6) erhalten:

$$e^0 = 1, \quad e^{\log 3} = 3,$$

und die u -Grenzen mit (7):

$$\sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad \sqrt{1+3} = 2.$$

○

⑨ Es sei $a < b$. Zur Berechnung des bestimmten Integrals

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} dx$$

verwenden wir die lineare Substitution

$$x := \frac{a+b}{2} + t \frac{b-a}{2}, \quad dx := \frac{b-a}{2} dt;$$

dem x -Intervall $[a, b]$ entspricht dabei das t -Intervall $[-1, 1]$ (Fig. 4.3.2).
Damit wird

$$(b-x)(x-a) = \left(\frac{b-a}{2} - t \frac{b-a}{2}\right) \left(\frac{b-a}{2} + t \frac{b-a}{2}\right) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 (1-t^2).$$

Das vorgelegte Integral geht damit über in

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 (1-t^2)}} \frac{b-a}{2} dt = \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t \Big|_{-1}^1 = \pi$$

und hat überraschenderweise einen von a und b unabhängigen Wert. (Strenggenommen handelt es sich um ein "uneigentliches Integral" (s.u.), da der Integrand unbeschränkt ist.) ○

Integration der rationalen Funktionen

Im Sinne einer Einführung behandeln wir Integrale der Form

$$J := \int \frac{Bx + C}{x^2 + bx + c} dx, \quad B, C, b, c \in \mathbb{R}.$$

Zunächst prüfen wir, ob der Nenner

$$Q(x) := x^2 + bx + c$$

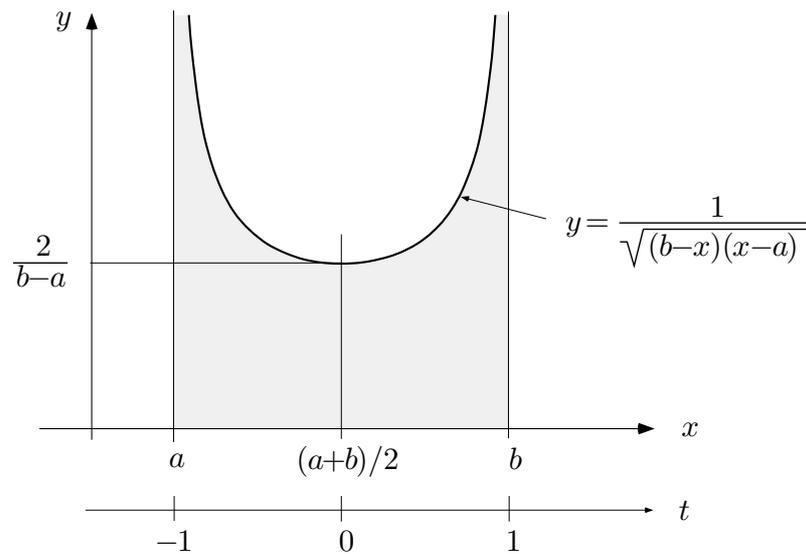


Fig. 4.3.2

reelle Nullstellen $\alpha_{1,2} := (-b \pm \sqrt{b^2 - 4c})/2$ besitzt. Wenn ja, so gilt

$$Q(x) \equiv (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) .$$

Sind α_1 und α_2 verschieden, so können wir den folgenden Ansatz zur **Partialbruchzerlegung** des Integranden machen:

$$\frac{Bx + C}{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)} \equiv \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2}{x - \alpha_2} . \quad (8)$$

Hier sind B und C gegeben, A_1 und A_2 noch zu bestimmen. Wir bringen die rechte Seite von (8) ebenfalls auf den Generalnenner $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$ und erhalten den Zähler

$$A_1(x - \alpha_2) + A_2(x - \alpha_1) = (A_1 + A_2)x - A_1\alpha_2 - A_2\alpha_1 .$$

Die Konstanten A_1 und A_2 sind nun so festzulegen, daß dieser Zähler identisch in x mit dem Zähler links in (8) übereinstimmt. Koeffizientenvergleich liefert das Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{l} A_1 + A_2 = B \\ -\alpha_2 A_1 - \alpha_1 A_2 = C \end{array} \right\} ,$$

aus dem A_1 und A_2 berechnet werden können. (Hier wird benutzt, daß $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ist.) Ist das geschehen, so hat man

$$J = \int \left(\frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2}{x - \alpha_2} \right) dx = A_1 \log |x - \alpha_1| + A_2 \log |x - \alpha_2| + \text{const.} .$$

Besitzt $Q(x)$ eine zweifache reelle Nullstelle α , so lautet der Ansatz zur Partialbruchzerlegung folgendermaßen:

$$\frac{Bx + C}{(x - \alpha)^2} \equiv \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \frac{A_1}{x - \alpha},$$

und er führt auf das Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{l} A_1 \quad \quad \quad = B \\ -\alpha A_1 + A_2 = C \end{array} \right\},$$

das offensichtlich lösbar ist. Man erhält in diesem Fall

$$J = -\frac{A_2}{x - \alpha} + A_1 \log |x - \alpha| + \text{const.} .$$

Besitzt jedoch das Nennerpolynom $Q(x)$ zwei konjugiert komplexe Nullstellen

$$\zeta := \beta + i\gamma, \quad \bar{\zeta} := \beta - i\gamma, \quad \gamma \neq 0,$$

so sieht die Sache wesentlich anders aus. Es gilt dann

$$Q(x) = (x - \zeta)(x - \bar{\zeta}) = (x - \beta - i\gamma)(x - \beta + i\gamma) = (x - \beta)^2 + \gamma^2. \quad (9)$$

Der Integrand läßt sich daher folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} \frac{Bx + C}{Q(x)} &= \frac{B}{2} \frac{2(x - \beta)}{(x - \beta)^2 + \gamma^2} + \frac{B\beta + C}{(x - \beta)^2 + \gamma^2} \\ &= \frac{B}{2} \frac{Q'(x)}{Q(x)} + \frac{B\beta + C}{(x - \beta)^2 + \gamma^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Den ersten Summanden rechts integrieren wir nun nach (4.4) und erhalten einen Logarithmus:

$$\int \frac{Q'(x)}{Q(x)} dx = \log Q(x) + \text{const.}$$

($Q(x)$ ist nach Voraussetzung positiv definit). Der zweite Summand in (10) liefert hingegen einen Arcustangens: Mit Hilfe der Substitution

$$\frac{x - \beta}{\gamma} := t, \quad x = \gamma t + \beta, \quad dx = \gamma dt$$

erhält man

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x - \beta)^2 + \gamma^2} dx &= \frac{1}{\gamma^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x - \beta}{\gamma}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\gamma^2} \left(\int \frac{\gamma dt}{1 + t^2} \right)_{t=(x-\beta)/\gamma} \\ &= \frac{1}{\gamma} \arctan \frac{x - \beta}{\gamma} + \text{const.} . \end{aligned} \quad (11)$$

⑩ Es soll das Integral

$$J := \int_{-1}^{11} \frac{x+5}{x^2-6x+25} dx$$

berechnet werden. Der Nenner

$$Q(x) := x^2 - 6x + 25 = (x-3)^2 + 16$$

besitzt keine reellen Nullstellen. Wir zerlegen daher das Integral nach (10) folgendermaßen:

$$J = \frac{1}{2} \int_{-1}^{11} \frac{2x-6}{x^2-6x+25} dx + \int_{-1}^{11} \frac{8}{(x-3)^2+16} dx .$$

Gehen wir weiter vor, wie abgemacht, so ergibt sich

$$J = \frac{1}{2} \log(x^2 - 6x + 25) \Big|_{-1}^{11} + \int_{-1}^{11} \frac{1/2}{\left(\frac{x-3}{4}\right)^2 + 1} dx .$$

Hier hat der ausintegrierte Teil den Wert $\frac{1}{2} \log \frac{80}{32}$. Im letzten Integral substituieren wir $(x-3)/4 := t$, was auf

$$x = 4t + 3, \quad dx = 4 dt$$

führt und die t -Grenzen -1 und 2 liefert. Dieses Integral hat folglich den Wert

$$\int_{-1}^2 \frac{2dt}{t^2+1} = 2 \arctan t \Big|_{-1}^2 = 2(\arctan 2 + \arctan 1),$$

und es ergibt sich definitiv

$$J = \frac{1}{2} \log \frac{5}{2} + 2(\arctan 2 + \arctan 1) = 4.2432 .$$

○

Grundsätzlich läßt sich *jede* rationale Funktion

$$R(x) := \frac{p(x)}{q(x)} := \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0}{x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0}$$

mit reellen Koeffizienten a_i, b_i elementar integrieren, und zwar geschieht das mit Hilfe einer additiven Zerlegung von $R(x)$ in einfachere rationale Funktionen, die sich leicht einzeln integrieren lassen. Die Existenz dieser sogenannten **Partialbruchzerlegung** ist eine rein algebraische Tatsache, die wir hier nicht

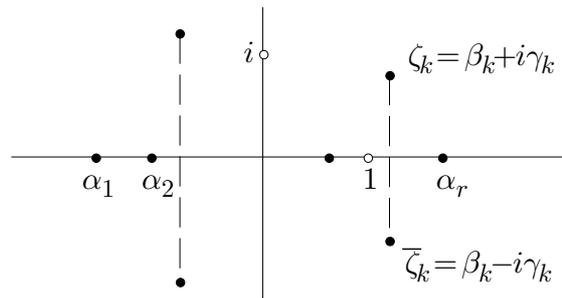


Fig. 4.3.3

beweisen. Wir erläutern hingegen das Vorgehen zur praktischen Herstellung dieser Zerlegung im konkreten Fall.

Schritt 1: Ist $m \geq n$, so führe man die Polynomdivision

$$p(x) : q(x) = \dots$$

aus, bis ein Rest $r(x)$ vom Grad $< n$ bleibt. Ist $p_*(x)$ das bei der Division rechter Hand aufgebaute Polynom, so gilt

$$R(x) = p_*(x) + \frac{r(x)}{q(x)}.$$

Was folgt, bezieht sich auf den “echt gebrochenen” Teil $r(x)/q(x)$.

Schritt 2: Das Nennerpolynom $q(x)$ besitzt nach dem Fundamentalsatz der Algebra r verschiedene reelle Nullstellen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ mit zugehörigen Vielfachheiten l_1, \dots, l_r , ferner s verschiedene Paare

$$\zeta_k = \beta_k + i\gamma_k, \quad \bar{\zeta}_k = \beta_k - i\gamma_k \quad (1 \leq k \leq s)$$

von nichtreellen Nullstellen mit zugehörigen Vielfachheiten m_k (Fig. 4.3.3); dabei ist natürlich

$$l_1 + \dots + l_r + 2m_1 + \dots + 2m_s = n.$$

(Damit ist der schlimmstmögliche Fall einkalkuliert. Im täglichen Leben sind die meisten Vielfachheiten = 1.) Infolgedessen läßt sich $q(x)$ wie folgt als Produkt von Linearfaktoren und reell-irreduziblen quadratischen Faktoren darstellen:

$$q(x) = (x - \alpha_1)^{l_1} \dots (x - \alpha_r)^{l_r} (Q_1(x))^{m_1} \dots (Q_s(x))^{m_s}.$$

Je zwei Linearfaktoren $(x - \zeta_k), (x - \bar{\zeta}_k)$ lassen sich nämlich gemäß (9) zu einem reellen quadratischen Faktor

$$Q_k(x) := (x - \zeta_k)(x - \bar{\zeta}_k) = (x - \beta_k)^2 + \gamma_k^2 = x^2 + b_k x + c_k$$

zusammenfassen.

Schritt 3: Jeder Faktor der Form $(x - \alpha)^l$ gibt Anlaß zu einem zugehörigen **Hauptteil**

$$\frac{A_l}{(x - \alpha)^l} + \frac{A_{l-1}}{(x - \alpha)^{l-1}} + \dots + \frac{A_1}{x - \alpha}$$

in der Partialbruchzerlegung von $R(x)$, und jeder einfache quadratische Faktor

$$Q(x) = (x - \beta)^2 + \gamma^2 = x^2 + bx + c$$

gibt Anlaß zu einem zugehörigen Hauptteil

$$\frac{Bx + C}{x^2 + bx + c}.$$

(Der Fall mehrfacher komplexer Nullstellen wird hier nicht weiterverfolgt.)

Schritt 4: Man schreibe alle aufgrund der Produktdarstellung des Nennerpolynoms $q(x)$ erforderlichen Hauptteile bzw. Partialbrüche mit unbestimmten Koeffizienten A , B , C an und bringe die Summe aller dieser Partialbrüche auf den Generalnenner $q(x)$. Man erhält einen "großen" Bruch $\tilde{r}(x)/q(x)$, und zwar erscheinen die eingeführten Koeffizienten A , B , C in den Koeffizienten des Zählerpolynoms $\tilde{r}(x)$.

Nun sollte ja

$$\frac{\tilde{r}(x)}{q(x)} \equiv \frac{r(x)}{q(x)}$$

sein, und dies ist nur möglich, wenn die Zählerpolynome identisch in x übereinstimmen. Der hierfür angestrebte Koeffizientenvergleich liefert die zur Festlegung der Koeffizienten A , B , C notwendigen Gleichungen. Wenn man alles richtig gemacht hat, besitzt dieses Gleichungssystem genau eine Lösung, denn die Partialbruchzerlegung ist eindeutig bestimmt.

Ⓜ Es soll das unbestimmte Integral

$$J := \int \frac{x^2 + 1}{x^3 - 1} dx$$

berechnet werden. Der Integrand ist bereits echt gebrochen, und

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

ist die reelle Zerlegung des Nenners. Wir haben daher anzusetzen:

$$\frac{x^2 + 1}{x^3 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}.$$

Bringen wir hier die rechte Seite auf den Generalnenner $x^3 - 1$, so erhalten wir für die Zählerpolynome folgende Relation:

$$x^2 + 1 \stackrel{!}{=} A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1),$$

und durch Koeffizientenvergleich ergibt sich für die Konstanten A, B, C das Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{r} 1 = A + B \\ 0 = A - B + C \\ 1 = A - C \end{array} \right\}$$

mit der Lösung $A = 2/3, B = 1/3, C = -1/3$. Die gesuchte Partialbruchzerlegung lautet daher:

$$\frac{x^2 + 1}{x^3 - 1} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{x - 1} + \frac{x - 1}{x^2 + x + 1} \right).$$

Für die Integration ist der zweite Partialbruch nach (10) weiter aufzuteilen; es ergibt sich

$$J = \frac{1}{3} \int \left(\frac{2}{x - 1} + \frac{1}{2} \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} - \frac{3}{2} \frac{1}{x^2 + x + 1} \right) dx. \quad (12)$$

Wir berechnen vorweg mit Hilfe von (11) das Integral

$$J_3 := \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \int \frac{1}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx$$

und erhalten

$$J_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + \text{const.}$$

Aus (12) ergibt sich daher im ganzen

$$J = \frac{1}{3} \log((x - 1)^2 \sqrt{x^2 + x + 1}) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + \text{const.},$$

wobei die große Klammer mit Hilfe der Funktionalgleichung des Logarithmus zustandegekommen ist. \bigcirc

⑫ Wir betrachten weiter das unbestimmte Integral

$$J := \int \frac{4x^5}{x^4 - 2x^2 + 1} dx .$$

Da der Integrand nicht echt gebrochen ist, führen wir erst die Polynomdivision

$$\frac{(4x^5)}{8x^3 - 4x} : (x^4 - 2x^2 + 1) = 4x$$

aus und erhalten

$$R(x) = 4x + \frac{8x^3 - 4x}{x^4 - 2x^2 + 1} .$$

Weiter gilt

$$x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 = (x - 1)^2(x + 1)^2 ; \quad (13)$$

somit lautet der Ansatz zur Partialbruchzerlegung des echt gebrochenen Teils von $R(x)$:

$$\frac{8x^3 - 4x}{x^4 - 2x^2 + 1} = \frac{A}{(x - 1)^2} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x + 1)^2} + \frac{D}{x + 1} .$$

Wir bringen wiederum die rechte Seite auf den Generalnenner (13) und setzen das resultierende Zählerpolynom gleich dem Zählerpolynom links:

$$8x^3 - 4x \stackrel{!}{=} A(x + 1)^2 + B(x - 1)(x + 1)^2 + C(x - 1)^2 + D(x + 1)(x - 1)^2 .$$

Nach Aufbereitung der rechten Seite liefert der Koeffizientenvergleich das Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{rclclcl} 8 & = & & B & & + D \\ 0 & = & A & + B & + C & - D \\ -4 & = & 2A & - B & - 2C & - D \\ 0 & = & A & - B & + C & + D \end{array} \right\}$$

mit der Lösung $A = 1$, $B = 4$, $C = -1$, $D = 4$. Damit wird

$$R(x) = 4x + \frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{4}{x - 1} - \frac{1}{(x + 1)^2} + \frac{4}{x + 1} ,$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} J &= \int R(x) dx = 2x^2 - \frac{1}{x - 1} + 4 \log |x - 1| + \frac{1}{x + 1} + 4 \log |x + 1| + \text{const.} \\ &= 2x^2 - \frac{2}{x^2 - 1} + 4 \log |x^2 - 1| + \text{const.} . \end{aligned}$$

○

Ist α eine *einfache* reelle Nullstelle des Nennerpolynoms $q(\cdot)$:

$$R(x) = \frac{r(x)}{(x - \alpha)\hat{q}(x)}, \quad \hat{q}(\alpha) \neq 0,$$

so läßt sich der Koeffizient A des zugehörigen Hauptteils

$$\frac{A}{x - \alpha}$$

ohne Auflösung eines Gleichungssystems bestimmen. Zum Beweis fassen wir alle andern Partialbrüche von $R(x)$ wieder zusammen und erhalten die Identität

$$\frac{r(x)}{(x - \alpha)\hat{q}(x)} \equiv \frac{A}{x - \alpha} + \frac{\hat{r}(x)}{\hat{q}(x)}.$$

Dies ist äquivalent mit

$$r(x) \equiv A\hat{q}(x) + \hat{r}(x)(x - \alpha).$$

Setzt man hier $x := \alpha$, so folgt

$$r(\alpha) = A\hat{q}(\alpha)$$

und somit

$$A = \frac{r(\alpha)}{\hat{q}(\alpha)}.$$

In Worten: Um den Koeffizienten über $x - \alpha$ zu erhalten, blende man den Faktor $x - \alpha$ aus dem Nenner von $R(x)$ aus und evaluiere das Übrige an der Stelle $x := \alpha$.

⑬ Für die Funktion

$$R(x) := \frac{x^2 - 2}{(x + 1)x(x - 1)} = \frac{A_{-1}}{x + 1} + \frac{A_0}{x} + \frac{A_1}{x - 1}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} A_{-1} &= \left. \frac{x^2 - 2}{x(x - 1)} \right|_{x:=-1} = -\frac{1}{2}, \\ A_0 &= \left. \frac{x^2 - 2}{(x + 1)(x - 1)} \right|_{x:=0} = 2, \\ A_1 &= \left. \frac{x^2 - 2}{(x + 1)x} \right|_{x:=1} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \int R(x) dx &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{4}{x} - \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x - 1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} (4 \log |x| - \log |x + 1| - \log |x - 1|) + \text{const.} \\ &= \log(x^2 / \sqrt{|x^2 - 1|}) + \text{const.} . \end{aligned}$$

○

Weitere Ausdrücke, die sich elementar integrieren lassen

Wir behandeln zum Schluß einige Typen von unbestimmten Integralen, die sich durch geeignete Substitutionen in Integrale von rationalen Funktionen verwandeln und damit elementar auswerten lassen. Die zugelassenen Integranden sind Ausdrücke der folgenden Art, wobei jeweils $R(u)$ eine rationale Funktion von einer und $R(u, v)$ eine rationale Funktion von zwei Variablen bezeichnet:

- (a) $R(e^t)$ und $R(\cosh t, \sinh t)$,
- (b) $R(\cos t, \sin t)$,
- (c) $R(x, \sqrt{Q(x)})$, $Q(x) := ax^2 + bx + c$,
- (d) $R(\sqrt{ax + b})$.

Zu (a): Integrale

$$\int R(e^t) dt$$

werden mit der naheliegenden Substitution

$$e^t := u \quad \left(\Rightarrow \quad t = \log u, \quad dt = \frac{1}{u} du \right) \quad (14)$$

in Integrale von rationalen Funktionen übergeführt:

$$\int R(e^t) dt = \left(\int R(u) \frac{1}{u} du \right)_{u:=e^t} .$$

Ein Integral $\int R(\cosh t, \sinh t) dt$ läßt sich nach Definition von \cosh und \sinh in ein Integral $\int R_1(e^t) dt$ verwandeln.

⑭ Bei dem “uneigentlichen Integral” (s.u.)

$$J := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\cosh t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{e^{2t} + 1} e^t dt$$

(Fig. 4.3.4) verwenden wir die erste Substitutionsregel (4.9):

$$e^t := u, \quad e^t dt := du .$$

Die u -Grenzen sind 0 und ∞ , und es ergibt sich

$$J = \int_0^{\infty} \frac{2}{u^2 + 1} du = 2 \arctan u \Big|_0^{\infty} = 2 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \pi .$$

○

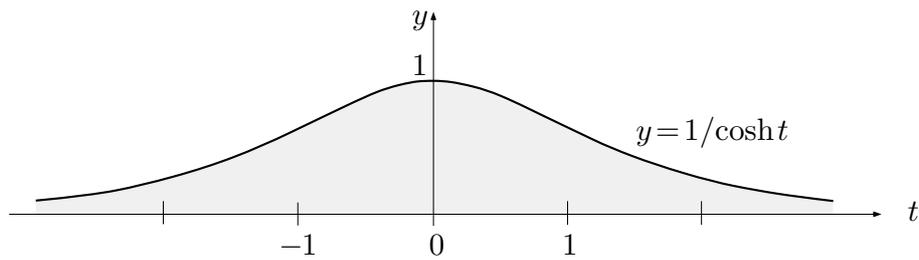


Fig. 4.3.4

Zu (b): Bei Integralen vom Typ

$$\int R(\cos t, \sin t) dt$$

würde an sich die Substitution $e^{it} := z$ (vgl. (14)) naheliegen. Um Schwierigkeiten mit dem “Logarithmus im Komplexen” zu vermeiden, verwendet man stattdessen die reelle Substitution

$$\tan \frac{t}{2} := \tau \quad (\Rightarrow \quad t = 2 \arctan \tau) .$$

Wegen

$$\cos t = \frac{1 - \tau^2}{1 + \tau^2}, \quad \sin t = \frac{2\tau}{1 + \tau^2}, \quad dt = \frac{2}{1 + \tau^2} d\tau$$

wird dadurch das gegebene Integral in ein “rationales Integral” $\int R_1(\tau) d\tau$ verwandelt. Es ist aber ratsam, erst nach irgendwelchen Hintertürchen auszuspähen und diesen letzten Ausweg wenn immer möglich zu vermeiden, da sich die auftretenden Grade dabei gerne verdoppeln.

⑮ Es soll das unbestimmte Integral

$$J := \int \frac{dt}{\cos t}$$

berechnet werden. Die angegebene Methode liefert

$$J = \left(\int \frac{1 + \tau^2}{1 - \tau^2} \frac{2}{1 + \tau^2} d\tau \right)_{\tau := \tan(t/2)} = \left(\log \frac{1 + \tau}{1 - \tau} \right)_{\tau := \tan(t/2)} + \text{const.},$$

wobei wir zuletzt eine “Grundformel” benutzt haben. Mit Hilfe des Additionstheorems des Tangens erhalten wir hieraus

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \log \tan \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \text{const.} .$$

○

Sehr oft geht es um bestimmte Integrale über eine Vollperiode $[0, 2\pi]$:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt .$$

Hierfür stellt die komplexe Analysis eine besonders elegante Methode zur Verfügung (Stichwort: *Residuensatz*), und zwar bildet gerade die oben verworfene Substitution $e^{it} := z$ dazu den Schlüssel.

Zu (c): Um ein Integral der Form

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

zu berechnen, müssen wir erst den auftretenden Radikanden

$$Q(x) := ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0,$$

auf eine Normalform bringen — gemeint ist vor allem: auf eine Form *ohne linearen Term*. Dies leistet die sogenannte **quadratische Ergänzung**:

$$Q(x) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right).$$

Die lineare Substitution $x + \frac{b}{2a} := y$ macht aus $Q(x)$ die neue quadratische Funktion

$$Q_*(y) = |a| (\pm y^2 \pm \rho^2), \quad (15)$$

wobei wir noch zur Abkürzung

$$\left| \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right| =: \rho^2$$

gesetzt haben und im weiteren $\rho > 0$ annehmen wollen. Welche Vorzeichen jeweils in (15) erscheinen, hängt von den Vorzeichen von a und von $4ac - b^2$ ab. Wenn nötig, läßt sich $Q_*(y)$ mit der weiteren Substitution $y := \rho u$ auf die folgende allereinfachste Form bringen:

$$Q_{**}(u) = A (\pm u^2 \pm 1), \quad A > 0 .$$

Aufgrund dieser Vorbemerkungen, müssen wir uns nur mit den folgenden drei Arten von Integralen befassen:

(ca) $\int R(y, \sqrt{y^2 + \rho^2}) dy,$

(cb) $\int R(y, \sqrt{y^2 - \rho^2}) dy,$

(cc) $\int R(y, \sqrt{\rho^2 - y^2}) dy;$

dabei ist $\rho > 0$. Das nächste Ziel ist, die Variable y so zu substituieren, daß sowohl y (und dy) wie der Wurzelausdruck nützliche Funktionen der neuen Variablen t werden. Dies leistet im Fall (ca) die Substitution

$$y := \rho \sinh t ;$$

man hat dann nämlich

$$dy = \rho \cosh t dt$$

und vor allem

$$\sqrt{y^2 + \rho^2} = \sqrt{\rho^2(\sinh^2 t + 1)} = \rho \cosh t .$$

Im Fall (cb) führt die Substitution

$$y := \rho \cosh t$$

in analoger Weise auf

$$dy = \rho \sinh t dt , \quad \sqrt{y^2 - \rho^2} = \rho \sinh t .$$

In beiden Fällen erhält man als neuen Integranden einen rationalen Ausdruck in $\cosh t$ und $\sinh t$, der vielleicht ohne weiteres unbestimmt integriert, schlimmstenfalls aber immer noch in einen rationalen Ausdruck in e^t umgeformt und nach (a) weiterbehandelt werden kann.

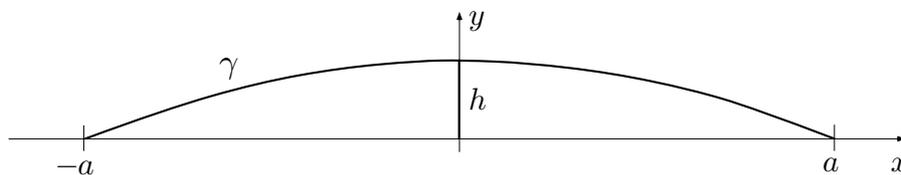


Fig. 4.3.5

⑩ Es soll die Länge eines Parabelbogens γ der Spannweite $2a$ und der lichten Höhe h (Fig. 4.3.5) berechnet werden. — Die Gleichung der Parabel lautet offenbar

$$y = h \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \quad (=: f(x)) ,$$

und wir erhalten nach 4.1.(16):

$$L(\gamma) = \int_{-a}^a \sqrt{1 + f'^2(x)} dx = \int_{-a}^a \sqrt{1 + \frac{4h^2}{a^4} x^2} dx .$$

Die Substitution

$$\frac{2h}{a^2} x := \sinh t, \quad dx := \frac{a^2}{2h} \cosh t dt$$

führt auf

$$L(\gamma) = \frac{a^2}{2h} \int_{-\tau}^{\tau} \cosh t \cosh t dt ;$$

dabei ist $\tau := \operatorname{arsinh}(2h/a)$. Wie man leicht verifiziert, gilt

$$\int \cosh^2 t dt = \frac{1}{2}(\cosh t \sinh t + t) + \text{const.} ; \quad (16)$$

folglich ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \frac{a^2}{4h} (\cosh t \sinh t + t) \Big|_{-\tau}^{\tau} = \frac{a^2}{2h} (\cosh \tau \sinh \tau + \tau) \\ &= \frac{a^2}{2h} \left(\sqrt{1 + \frac{4h^2}{a^2}} \frac{2h}{a} + \operatorname{arsinh} \frac{2h}{a} \right) = \sqrt{a^2 + 4h^2} + \frac{a^2}{2h} \operatorname{arsinh} \frac{2h}{a} . \end{aligned} \quad \circ$$

Im Fall (cc) lautet die treffende Substitution natürlich

$$y := \rho \sin t ;$$

sie liefert

$$dy = \rho \cos t dt, \quad \sqrt{\rho^2 - y^2} = \rho \cos t .$$

Der neue Integrand ist folglich ein rationaler Ausdruck in $\cos t$ und $\sin t$, der vielleicht ohne weiteres integriert und jedenfalls nach (b) weiterbehandelt werden kann.

⑰ Es sei

$$B := \{ (w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \mid w^2 + x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \}$$

die vierdimensionale Vollkugel vom Radius a im (w, x, y, z) -Raum. Wir wollen das (vierdimensionale) Volumen $\mu(B)$ berechnen. Hierzu fassen wir B als Rotationskörper bezüglich der z -Achse auf und zerlegen das Intervall $[-a, a]$ der z -Achse in kleine Teilintervalle

$$I_k := [z_{k-1}, z_k] \quad (1 \leq k \leq N) .$$

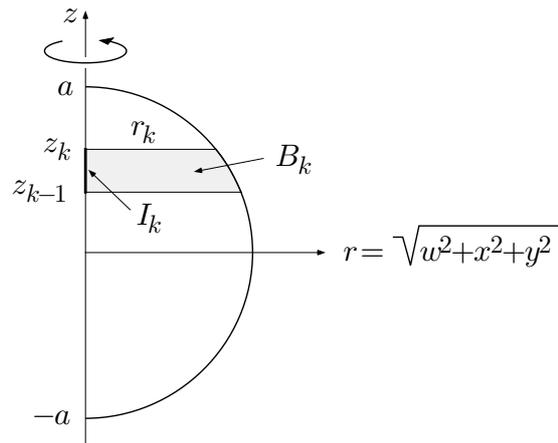


Fig. 4.3.6

Die zwei Ebenen $z = z_{k-1}$ und $z = z_k$ schneiden aus B eine kugelrunde flache Scheibe B_k vom Radius $r_k = \sqrt{a^2 - z_k^2}$ und der Höhe $z_k - z_{k-1}$ heraus (Fig. 4.3.6). Das vierdimensionale Volumen von B_k ist daher approximativ gegeben durch

$$\mu(B_k) \doteq \frac{4\pi}{3} r_k^3 (z_k - z_{k-1}) = \frac{4\pi}{3} (a^2 - z_k^2)^{3/2} \mu(I_k),$$

und wir erhalten durch Summation über k :

$$\mu(B) \doteq \frac{4\pi}{3} \sum_{k=1}^N (a^2 - z_k^2)^{3/2} \mu(I_k).$$

Hier steht rechter Hand eine zu dem z -Intervall $[-a, a]$ gehörige Riemannsche Summe. Der Grenzübergang $\delta(\mathcal{Z}) \rightarrow 0$ liefert somit die Formel

$$\mu(B) = \frac{4\pi}{3} \int_{-a}^a (a^2 - z^2)^{3/2} dz.$$

Substituieren wir, wie abgemacht,

$$z := a \sin t, \quad dz = a \cos t dt,$$

so sind die neuen Grenzen gerade $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$, und wir erhalten

$$\mu(B) = \frac{4\pi}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (a \cos t)^3 a \cos t dt = \frac{8\pi}{3} a^4 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t dt.$$

Das letzte Integral ist die Zahl c_4 aus Beispiel (5); wir haben sie dort berechnet zu $c_4 = 3\pi/16$. Damit ergibt sich schließlich

$$\mu(B) = \frac{\pi^2}{2} a^4.$$

○

Zu (d): Bei Integralen der Form

$$\int R(x, \sqrt{ax+b}) dx$$

“substituiere man die Wurzel”, das heißt: Man setze

$$\sqrt{ax+b} := u,$$

wobei diese Relation letzten Endes die Rücksubstitution $u = \phi^{-1}(x)$ ausdrückt. Damit wird

$$x = \frac{1}{a}(u^2 - b), \quad dx = \frac{2}{a} u du,$$

und man erhält einen rationalen Integranden in der Variablen u .

⑱ Um das Integral

$$J := \int_1^4 \frac{dx}{x\sqrt{5-x}}$$

zu berechnen, setzen wir

$$\sqrt{5-x} := u.$$

Dies führt auf

$$x = 5 - u^2, \quad dx = -2u du$$

sowie auf die u -Grenzen $\sqrt{5-1} = 2$, $\sqrt{5-4} = 1$, und es ergibt sich nacheinander

$$\begin{aligned} J &= \int_2^1 \frac{-2u du}{(5-u^2)u} = \int_1^2 \frac{2}{5-u^2} du = \frac{1}{\sqrt{5}} \int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{5}+u} + \frac{1}{\sqrt{5}-u} \right) du \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\log(\sqrt{5}+u) - \log(\sqrt{5}-u)) \Big|_1^2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \log \frac{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \log \frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \log \frac{(3+\sqrt{5})^2}{9-5} = \frac{2}{\sqrt{5}} \log \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 0.8608. \end{aligned}$$

○

* Anwendung: Das arithmetisch-geometrische Mittel

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einer Anwendung des bisher Gelernten, die über den Rahmen eines instruktiven Beispiels hinausgeht. Es handelt sich vielmehr um ein klassisches Stück Mathematik, genaugenommen: um eine bahnbrechende Leistung des zweiundzwanzigjährigen Gauß.

Es seien zwei Zahlen a und b , $a \geq b > 0$, gegeben. Beginnend mit

$$a_0 := a, \quad b_0 := b$$

bildet man sukzessiv arithmetische Mittel a_n und geometrische Mittel b_n nach der folgenden Rekursionsvorschrift:

$$a_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} := \sqrt{a_n b_n}. \quad (17)$$

Bsp:

a_n	b_n
2	1
1.5	1.414
1.4571	1.4564
1.456791048	1.456791014

Experimente mit verschiedenen Anfangswerten a und b zeigen, daß die beiden Folgen a_n und b_n jeweils äußerst schnell gegen einen gemeinsamen Grenzwert konvergieren. In der Tat gilt allgemein

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n - 2\sqrt{a_n b_n} + b_n}{2} = \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2}{2} = \frac{(a_n - b_n)^2}{2(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2},$$

das heißt: Es liegt quadratische Konvergenz vor.

Bei vielen Iterationsprozessen hängt der Grenzwert nicht von den Anfangswerten ab, hier aber schon. Wir stehen damit vor der Aufgabe, den Grenzwert $M(a, b)$, genannt das **arithmetisch-geometrische Mittel** (abgekürzt: **AGM**) von a und b , als Funktion der Variablen a und b darzustellen.

Wie Gauß 1799 als erster gezeigt hat, läßt sich das AGM von zwei Zahlen a und b durch ein Integral ausdrücken. Es gilt nämlich

$$M(a, b) = \frac{1}{T(a, b)}, \quad (18)$$

und zwar ist $T(a, b)$ das folgende (elliptische, also nicht elementare) Integral:

$$T(a, b) := \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(a^2 + t^2)(b^2 + t^2)}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}}.$$

Die beiden Darstellungen von $T(a, b)$ gehen durch die Substitution $t = b \tan \theta$ auseinander hervor; wir überlassen die Details dem Leser. — Den Schlüssel zu der behaupteten Formel (18) bildet die folgende Invarianzeigenschaft des Integrals $T(a, b)$:

$$T(a, b) = T\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) \quad (a \geq b > 0). \quad (19)$$

Wir nehmen für den Moment an, (19) sei bewiesen. Aufgrund der Rekursionsvorschrift (17) gilt dann

$$T(a, b) = T(a_n, b_n) \quad \forall n,$$

so daß wir die folgende Kette von Gleichungen erhalten:

$$\begin{aligned} T(a, b) &= \lim_{n \rightarrow \infty} T(a_n, b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{M^2 \cos^2 \theta + M^2 \sin^2 \theta}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{M} = \frac{1}{M}; \end{aligned}$$

dabei haben wir zur Abkürzung $M(a, b) =: M$ gesetzt. Aus (19) folgt also (18), so daß wir nur noch (19) beweisen müssen.

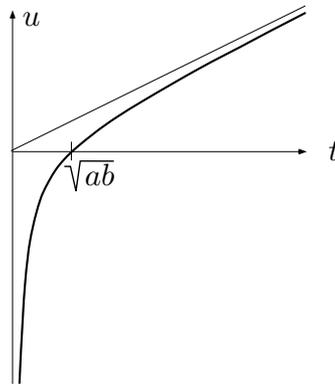


Fig. 4.3.7

□ Die Substitutionsgleichung

$$\frac{1}{2} \left(t - \frac{ab}{t} \right) =: u \quad (0 < t < \infty)$$

(Fig. 4.3.7) liefert die Formeln

$$\begin{aligned} t &= u + \sqrt{ab + u^2} \quad (-\infty < u < \infty), \\ dt &= \left(1 + \frac{u}{\sqrt{ab + u^2}} \right) du = \frac{t}{\sqrt{ab + u^2}} du; \end{aligned}$$

dabei steht das letzte ‘t’ als Abkürzung für den Ausdruck $u + \sqrt{ab + u^2}$. Wir merken uns noch die folgende Beziehung zwischen den beiden Variablen t und u :

$$t^2 = ab + 2ut. \quad (20)$$

Führen wir diese Substitution in $T(a, b)$ tatsächlich durch, so ergibt sich

$$\begin{aligned} T(a, b) &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{\sqrt{(a^2 + ab + 2ut)(b^2 + ab + 2ut)}} \frac{du}{\sqrt{u^2 + ab}} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{R}} \frac{du}{\sqrt{u^2 + ab}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Hier wurde das t im Zähler in den Radikanden R hineingezogen; es ist also

$$\begin{aligned} R &:= \left(\frac{a(a+b)}{t} + 2u \right) \left(\frac{b(a+b)}{t} + 2u \right) \\ &= \frac{ab}{t^2} (a+b)^2 + \frac{2u}{t} (a+b)^2 + 4u^2 = \frac{ab + 2ut}{t^2} (a+b)^2 + 4u^2 \\ &= 4 \left(\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + u^2 \right); \end{aligned}$$

dabei haben wir zuletzt wieder (20) benützt. Tragen wir den erhaltenen Wert von R in (21) ein, so folgt

$$\begin{aligned} T(a, b) &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{4 \left(\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + u^2 \right) (ab + u^2)}} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{du}{\sqrt{\left(\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + u^2 \right) (ab + u^2)}} = T \left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab} \right). \quad \square \end{aligned}$$

Aufgaben

1. Leite ein verkoppeltes Paar von Rekursionsformeln her für die Größen

$$c_n := \int_0^{\pi/2} t^n \cos t \, dt, \quad s_n := \int_0^{\pi/2} t^n \sin t \, dt$$

und berechne die numerischen Werte $c_0, \dots, c_4, s_0, \dots, s_4$. Oder einfacher: Bestimme eine Rekursionsformel für die komplexen Größen

$$e_n := \int_0^{\pi/2} t^n e^{it} \, dt.$$

2. Es sei

$$C_n := \int_0^{\log 2} \cosh^n t \, dt \quad (n \geq 0).$$

Bestimme C_0 , C_1 sowie eine Rekursionsformel für die C_n . (*Hinweis:* ‘cosh’, nicht ‘cos’!)

3. (M) Berechne die folgenden unbestimmten Integrale:

$$(a) \int \sin^2 t e^{-t} \, dt, \quad (b) \int \frac{t^3}{\sqrt{t^2+1}} \, dt \quad (t^2+1 =: u),$$

$$(c) \int \sinh t \cos t \, dt, \quad (d) \int \frac{dt}{1+\cos t} \, dt \quad (\tan \frac{t}{2} =: u),$$

$$(e) \int \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{t-t}} \, dt \quad (t := \sin^2 u), \quad (f) \int t^3 \arctan t \, dt$$

und bringe das Resultat, wenn nötig, auf eine typographisch akzeptable Form.

4. (M) Es sei γ der Graph der Funktion

$$f(x) := \frac{x^2}{8} - \log x \quad (1 \leq x \leq 2).$$

Berechne die Länge $L(\gamma)$.

5. (M) Berechne die folgenden bestimmten Integrale

$$(a) \int_{11}^{13} \frac{3t-5}{7t+9} \, dt, \quad (b) \int_{-1}^1 \frac{1}{x^4+1} \, dt,$$

$$(c) \int_0^1 x \arcsin x \, dx \quad (x := \sin t), \quad (d) \int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{t}) \, dt,$$

$$(e) \int_0^1 (\arcsin y)^2 \, dy, \quad (f) \int_{-1}^1 \frac{dx}{6-x-x^2}$$

und bringe das Resultat, wenn nötig, auf eine typographisch akzeptable Form.

6. Bestimme den Schwerpunkt einer Halbkugel.

7. Berechne mit Hilfe der in Aufgabe 4.1.5 gefundenen Formel die Oberfläche des Rotationsellipsoids mit den Halbachsen a , a , b .

8. Aus einem Stück Draht läßt sich gemäß Fig. 4.3.8 ein Kreisel herstellen. Wie groß muß der Winkel zwischen den beiden Speichen gewählt werden, damit das Ding möglichst rund läuft? (*Hinweis:* Man muß dafür sorgen, daß der Schwerpunkt auf der Achse liegt. Hierzu benötigt man 1 kleine Figur, 1 Zeile Rechnung, 1 Wert aus dem Taschenrechner.)

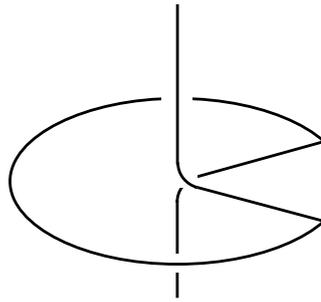


Fig. 4.3.8

9. (M) Bestimme die Partialbruchzerlegung der folgenden Funktionen:

(a) $\frac{x^3}{(x-a)^2}$, (b) $\frac{1}{x^6-1}$,

(c) $\frac{36}{x^5-2x^4-2x^3+4x^2+x-2}$, (d) $\frac{t}{t^3+t^2-t-1}$

und bringe das Resultat, wenn nötig, auf eine typographisch akzeptable Form.

10. Wieviele unbestimmte Koeffizienten sind für die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion

$$R(x) := \frac{(2x^2-1)^2(3x^3+1)^3}{(x^2-x+17)(x-2)^3(x-1)(x+4)}$$

insgesamt vorzusehen (inklusive die Koeffizienten eines allfälligen polynomialen Anteils)?

11. (M) Die Funktionen $u \mapsto \frac{e^u}{u}$ und $x \mapsto \sqrt{1+x^4}$ besitzen keine elementaren Stammfunktionen. Berechne die folgenden Integrale, so weit sie elementar sind:

(a) $\int \frac{\log x}{x} dx$, (b) $\int \frac{x}{\log x} dx$,

(c) $\int \frac{1}{x \log x} dx$, (d) $\int x \sqrt{1+x^4} dx$,

(e) $\int \sqrt{1+e^{4t}} dt$.

4.4 Uneigentliche Integrale

Problemstellung

Sind der Bereich $B \subset \mathbb{R}^n$ oder die Funktion $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ unbeschränkt, so erstreckt sich der Kuchen $K_{B,f} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (Fig. 4.1.9) ins Unendliche, und sein Volumen wird jedenfalls problematisch. Auch die Riemannschen Summen

$$\sum_{k=1}^N f(\mathbf{x}_k) \mu(B_k)$$

machen Mühe, von deren Grenzwert für $\delta(\mathcal{Z}) \rightarrow 0$ gar nicht zu reden. Trotzdem ist es in vielen derartigen Fällen möglich, dem Integral

$$\int_B f(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x})$$

einen einleuchtenden Sinn und Wert zuzuweisen. Wir haben im vorangehenden Abschnitt schon einige derartige “uneigentliche Integrale” angetroffen. Ihr Wert ist oft eine interessante universelle Konstante, weil hier die betreffende Funktion bis an die natürlichen Grenzen ihres Definitionsbereichs integriert wird.

Bsp: $\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \pi, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}.$

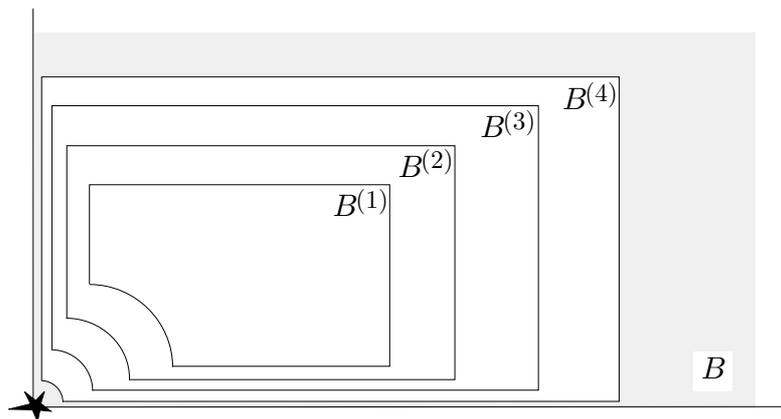


Fig. 4.4.1

Das folgende Vorgehen liegt nahe: Man betrachtet eine **Ausschöpfung** von B durch eine wachsende Folge von (beschränkten) Teilbereichen $B^{(n)}$ (siehe die Fig. 4.4.1) — in der Praxis wählt man allerdings eine kontinuierliche Schar derartiger Teilbereiche — mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B^{(n)} := \bigcup_{n=1}^{\infty} B^{(n)} = B,$$

und zwar soll für jedes n das Integral

$$\int_{B^{(n)}} f(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x})$$

als Grenzwert von Riemannschen Summen definiert sein und sich mit den Methoden der Abschnitte 4.3 und 4.5 berechnen lassen.

In einem zweiten Schritt betrachtet man den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B^{(n)}} f(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) =: \int_B f(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x})$$

dieser Integrale und spricht dann vom **uneigentlichen Integral** von f über B . Ist dieser Grenzwert vorhanden und endlich, so heißt das uneigentliche Integral **konvergent**, in allen anderen Fällen **divergent**. Infolgedessen gibt es für uneigentliche Integrale wie für unendliche Reihen Konvergenzkriterien. Wir beschränken uns auf zwei Vergleichskriterien; sie beziehen sich auf die folgenden beiden Arten von Integralen:

$$\int_a^\infty f(t) dt := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) dt, \quad \int_0^b g(t) dt := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_\varepsilon^b g(t) dt$$

(Fig. 4.4.2); dabei soll g für $t \rightarrow 0+$ gegen ∞ streben.

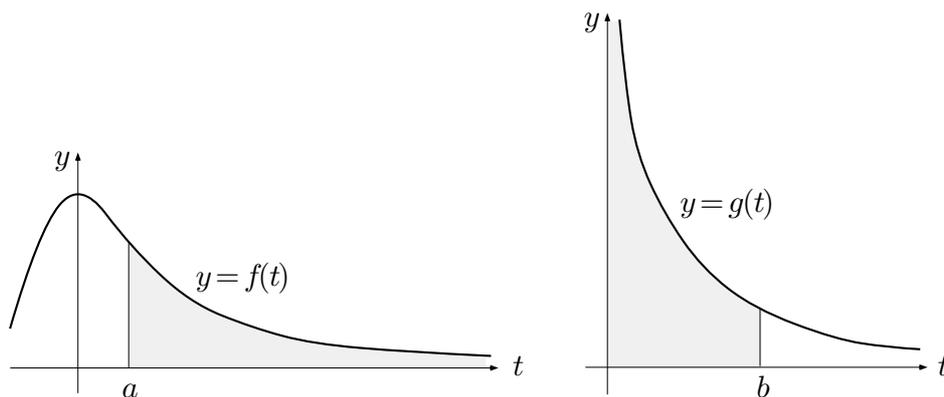


Fig. 4.4.2

Zwei einfache Konvergenzkriterien

(4.11) (a) Nimmt $|f(t)|$ für $t \rightarrow \infty$ mindestens so rasch ab wie $1/t^\alpha$ mit einem geeigneten $\alpha > 1$, das heißt: Gilt für ein C und ein $\alpha > 1$ die Abschätzung

$$|f(t)| \leq \frac{C}{t^\alpha} \quad (t > t_0),$$

so ist das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(t) dt$ (absolut) konvergent.

(b) Ist jedoch für ein geeignetes $C > 0$ durchwegs

$$f(t) \geq \frac{C}{t} \quad (t > t_0),$$

so ist das Integral $\int_a^\infty f(t) dt$ divergent.

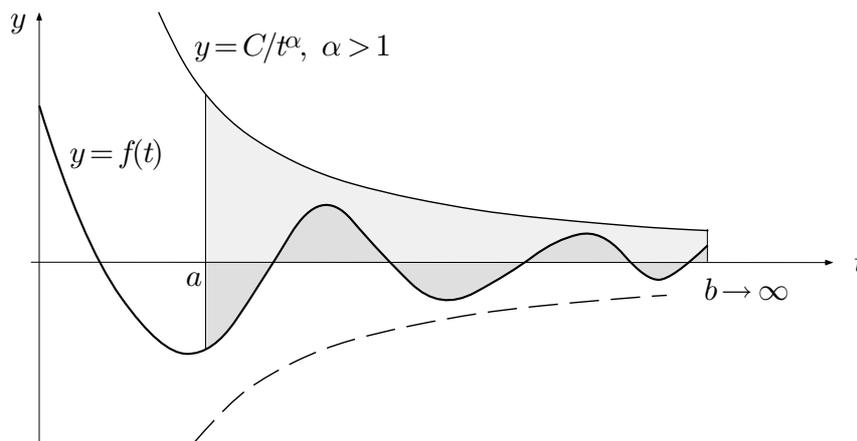


Fig. 4.4.3

□ Ist $\alpha > 1$, so gilt

$$\int_1^b \frac{C}{t^\alpha} dt = \frac{-C}{\alpha-1} \frac{1}{t^{\alpha-1}} \Big|_1^b = \frac{C}{\alpha-1} \left(1 - \frac{1}{b^{\alpha-1}}\right)$$

und somit

$$\int_1^\infty \frac{C}{t^\alpha} dt := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{C}{t^\alpha} dt = \frac{C}{\alpha-1}.$$

Andererseits ist

$$\int_1^b \frac{C}{t} dt = C \log t \Big|_1^b = C \log b$$

und somit

$$\int_1^{\infty} \frac{C}{t} dt := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{C}{t} dt = \infty .$$

Der auf ein beliebiges f bezügliche Teil der Behauptung wird durch die Figuren 4.4.3 und 4.4.4 plausibel. \square

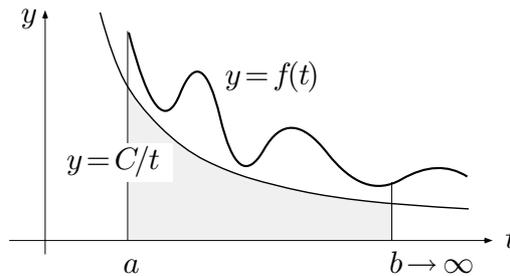


Fig. 4.4.4

① Das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} \quad (= \pi)$$

haben wir in Beispiel 4.3.⑭ berechnet; das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt$$

werden wir noch berechnen, und für das Integral

$$\int_1^{\infty} t^{\lambda} e^{-t} dt, \quad (1)$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ eine gegebene Zahl, schließen wir folgendermaßen: Auch wenn λ noch so groß ist, immer gibt es ein t_0 mit

$$e^t > t^{\lambda+2} \quad (t > t_0),$$

und das heißt

$$f(t) := t^{\lambda} e^{-t} < \frac{1}{t^2} \quad (t > t_0).$$

Die Integrale (1) sind daher für beliebiges (festes) λ konvergent. — Das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{t^2 + 4}{(1 + 4t^2)^{3/2}} dt$$

hingegen ist divergent: Schreiben wir

$$f(t) := \frac{t^2 + 4}{(1 + 4t^2)^{3/2}} = \frac{1}{t} \frac{1 + 4/t^2}{(4 + 1/t^2)^{3/2}},$$

so strebt der zweite Faktor rechter Hand mit $t \rightarrow \infty$ gegen $1/8$. Somit gilt für alle hinreichend großen t :

$$f(t) \geq \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{t}. \quad \bigcirc$$

Bei den uneigentlichen Integralen der folgenden Art sind jedoch die für Konvergenz benötigten Exponenten β ausdrücklich < 1 :

(4.12) (a) Geht $g(t)$ für $t \rightarrow 0+$ höchstens so rasch gegen ∞ wie $1/t^\beta$ mit einem geeigneten $\beta < 1$, das heißt: Gilt für ein C und ein $\beta < 1$ die Abschätzung

$$0 \leq g(t) \leq \frac{C}{t^\beta} \quad (0 < t < t_0),$$

so ist das uneigentliche Integral $\int_0^b g(t) dt$ konvergent.

(b) Ist jedoch für ein geeignetes $C > 0$ durchwegs

$$g(t) \geq \frac{C}{t} \quad (0 < t < t_0),$$

so ist das Integral $\int_0^b g(t) dt$ divergent.

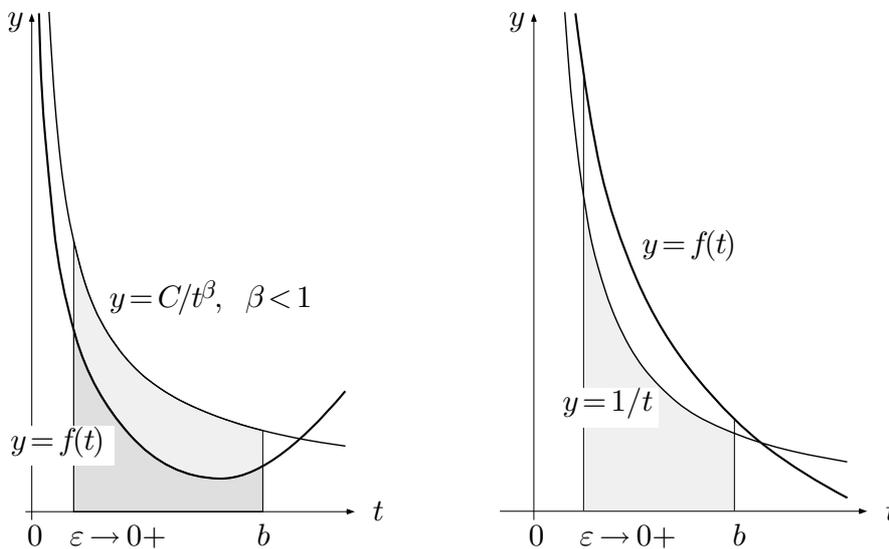


Fig. 4.4.5

□ Ist $\beta < 1$, so gilt

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{C}{t^{\beta}} = \frac{-C}{\beta-1} \frac{1}{t^{\beta-1}} \Big|_{\varepsilon}^1 = \frac{C}{1-\beta} (1 - \varepsilon^{1-\beta})$$

und somit

$$\int_0^1 \frac{C}{t^{\beta}} dt := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{C}{t^{\beta}} dt = \frac{C}{1-\beta}.$$

Andererseits ist

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{C}{t} dt = C \log t \Big|_{\varepsilon}^1 = -C \log \varepsilon$$

und somit

$$\int_0^1 \frac{C}{t} dt := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{C}{t} dt = \infty.$$

Der auf ein beliebiges g bezügliche Teil der Behauptung wird durch die Figur 4.4.5 plausibel. ┘

② In Beispiel 4.3.⑨ wurde das uneigentliche Integral

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$$

berechnet und damit automatisch als konvergent erwiesen. Hier noch ein a priori Konvergenzbeweis mit Hilfe von (4.12):



Fig. 4.4.6

Ist $x \leq \frac{a+b}{2}$ (Fig. 4.4.6), so gilt $b-x \geq \frac{b-a}{2} =: C$. Damit haben wir

$$\frac{1}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} \leq \frac{1}{\sqrt{C(x-a)}} = \frac{1}{\sqrt{C}} \cdot \frac{1}{(x-a)^{1/2}} \quad (a < x \leq \frac{a+b}{2}),$$

und das ist für die Konvergenz des Integrals an der unteren Grenze hinreichend. Analog schließt man bei b . ○

Anwendung: Die Gammafunktion

③ Die Fakultätfunktion (Fig. 4.4.7) ist für natürliche Zahlen n rekursiv definiert durch

$$0! := 1, \quad n! := n \cdot (n-1)! \quad (n \geq 1).$$

Es liegt nahe, nach einer “natürlichen” Fortsetzung dieser Funktion auf nicht-ganze Werte der unabhängigen Variablen zu fragen. Lineare Interpolation ist nicht sehr inspiriert. Jedenfalls wird man auf der Funktionalgleichung

$$x! = x \cdot (x-1)! \quad (x > 0)$$

bestehen. Diese Bedingung reicht aber zur Festlegung der gesuchten Funktion nicht aus; denn im x -Intervall $]-1, 0[$ können wir noch beliebige “Anfangswerte” wählen.

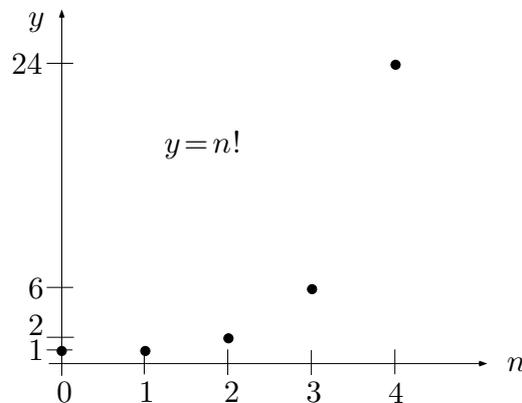


Fig. 4.4.7

Die “richtige” Fortsetzung der Fakultätfunktion ist vor allen noch möglichen durch eine gewisse Konvexitätsbedingung ausgezeichnet (ihr Logarithmus ist konvex). In erster Linie besitzt sie aber eine einfache Integraldarstellung, der wir noch kurz nachgehen. Seit Euler definiert man die **Gammafunktion** durch

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \quad (\alpha > 0). \quad (2)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist ein **Integral mit einem Parameter**: Integriert wird nach t , der Wert des Integrals hängt aber vom Wert des während der Integration festgehaltenen Parameters α ab. Wir haben in Beispiel ① gezeigt, daß das Integral jedenfalls an der oberen Grenze konvergiert. Ist $0 < \alpha < 1$, so ist das Integral auch an der unteren Grenze als uneigentliches Integral anzusehen, konvergiert aber nach (4.12)(a), denn es gilt

$$t^{\alpha-1} e^{-t} \leq \frac{1}{t^{1-\alpha}} \quad (t > 0),$$

und der Exponent $1 - \alpha$ ist < 1 .

Die Gammafunktion ist eine der wichtigsten nichtelementaren Funktionen (das Integral (2) läßt sich für unbestimmtes α nicht elementar auswerten) und tritt in den verschiedensten Zusammenhängen auf. Wir beweisen darüber:

$$(4.13)(a) \quad \Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha) \quad (\alpha > 0),$$

$$(b) \quad \Gamma(n + 1) = n! \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Die Gammafunktion ist also in der Tat die Lösung des angezogenen Fortsetzungsproblems, abgesehen von dem lästigen Shift $n \rightsquigarrow n + 1$.

□ In der nachfolgenden Rechnung müßten strenggenommen Integrale von ε bis b betrachtet werden; anschließend wäre der Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0+$, $b \rightarrow \infty$ durchzuführen. — Es gilt

$$\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^\infty \underset{\downarrow}{t^\alpha} \underset{\uparrow}{e^{-t}} dt = -t^\alpha e^{-t} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \alpha t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \alpha \Gamma(\alpha).$$

Wegen $\alpha > 0$ ist nämlich

$$\lim_{t \rightarrow 0+} t^\alpha e^{-t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t^\alpha e^{-t} = 0,$$

das heißt: Der “ausintegrierte Teil” liefert keinen Beitrag.

Weiter ist

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^\infty = 1 = 0!.$$

Für den Induktionsbeweis von (b) nehmen wir an, (b) sei richtig für n . Dann folgt mit (a):

$$\Gamma(n + 2) = (n + 1)\Gamma(n + 1) = (n + 1) \cdot n! = (n + 1)!,$$

und (b) ist damit auch für $n + 1$ als richtig erwiesen. ┘

Wie wir noch zeigen werden, ist $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Der Graph der Gammafunktion sieht somit aus, wie in der Figur 4.4.8 dargestellt. ○

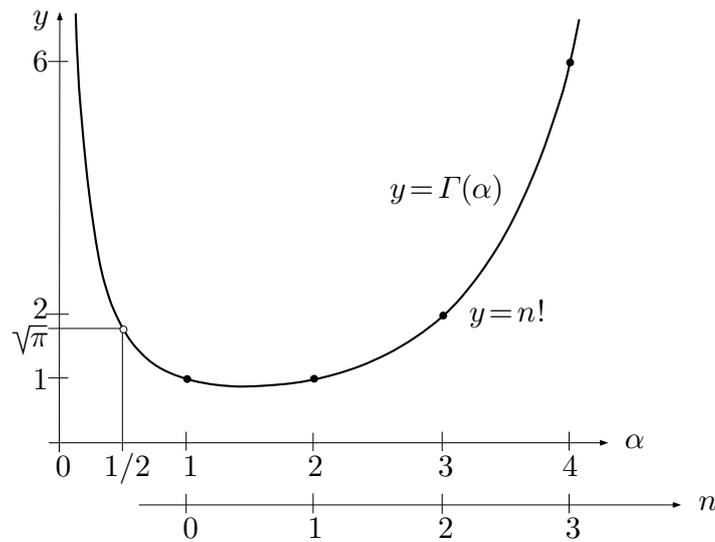


Fig. 4.4.8

Aufgaben

1. (M) Konvergieren oder divergieren die folgenden uneigentlichen Integrale? Die Antwort ist zu begründen. Im Fall der Konvergenz bestimme man den Wert des Integrals.

(a) $\int_0^1 \frac{dx}{x+x^3}$, (b) $\int_1^\infty \frac{dx}{x+x^3}$.

2. Berechne die Länge der logarithmischen Spirale $r(\phi) := ae^{q\phi}$ vom Ursprung bis zum Punkt $(a, 0)$.

3. Berechne die folgenden uneigentlichen Integrale von Hand und, so weit möglich, mit Hilfe von (M) :

(a) $\int_{-\infty}^\infty \exp(3t - e^t) dt$ ($e^t := u$), (b) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{3x^2 + 4x + 5}$,

(c) $\int_0^{5/4} \frac{dx}{|1-x^2|^{1/2}}$, (d) $\int_0^1 \frac{dt}{t^{2/3} + t^{3/4}}$.

4. Auf der Grundrißebene steht eine unendlich lange kreiszylindrische Blechröhre, deren Achse mit der z -Achse zusammenfällt und die die konstante Flächendichte σ aufweist. Man berechne die Gravitationswirkung dieser Röhre im Ursprung, in anderen Worten: die Beschleunigung, mit der ein dort befindlicher Probekörper nach oben gesogen wird. (Gravitationskonstante $:= \gamma$)

4.5 Mehrfache Integrale

Es sei $B \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter, insbesondere beschränkter, mehrdimensionaler Bereich und $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist das Integral

$$\int_B f(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x})$$

erklärt als Grenzwert von Riemannschen Summen

$$\sum_{k=1}^N f(\mathbf{x}_k) \mu(B_k) .$$

Wir benötigen eine allgemeine Methode, um derartige Integrale zu berechnen, wenn f durch einen Ausdruck in den Variablen x_1, \dots, x_n und B durch Ungleichungen gegeben sind.

Bsp:

$$\int_B (xy + yz + zx) dV, \quad B := \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, |x + y + z| \leq 1 \}$$

(Der Bereich B ist ein durch zwei parallele Schnitte schief abgeschnittener Rotationszylinder.)

Den Kuchen in Scheiben schneiden

Es sei zunächst

$$Q := [a, b] \times [c, d]$$

ein Rechteck in der (x, y) -Ebene und $f: Q \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ (fast überall) stetig. Wir interpretieren das Integral $\int_Q f d\mu$ als Volumen des Kuchens

$$K_{Q,f} := \{ (x, y, z) \mid (x, y) \in Q, 0 \leq z \leq f(x, y) \} .$$

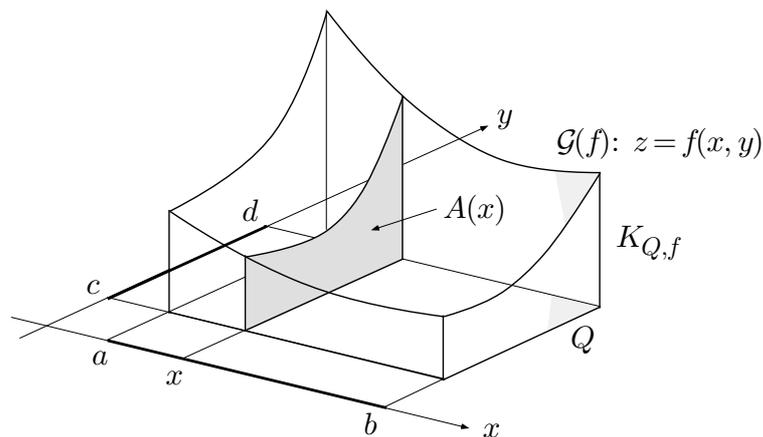


Fig. 4.5.1

Jede Ebene $x = \text{const.}$ schneidet $K_{Q,f}$ in einem Flächenstück, dessen Form und Inhalt natürlich von der gewählten Schnittstelle $x \in [a, b]$ abhängen. Der Fig. 4.5.1 entnimmt man, daß sich der Inhalt $A(x)$ dieses Flächenstücks als Integral bezüglich der Variablen y auffassen läßt:

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) dy . \quad (1)$$

Die Variable x ist hier während der Integration *als Konstante zu behandeln*. Wir zerlegen nun das x -Intervall $[a, b]$ durch Teilungspunkte

$$\mathcal{Z} : \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

in kleine Teilintervalle $I_k := [x_{k-1}, x_k]$. Die Ebenen $x = x_k$ ($0 \leq k \leq N$) zerlegen dann den Kuchen $K_{Q,f}$ in flache Teilkörper (Fig. 4.5.2), die angenähert prismatisch sind mit Grundfläche $A(x_k)$ und Höhe $x_k - x_{k-1} = \mu(I_k)$. Das Volumen V_k eines derartigen Teilkörpers ist folglich näherungsweise gegeben durch

$$V_k \doteq A(x_k) \mu(I_k) .$$

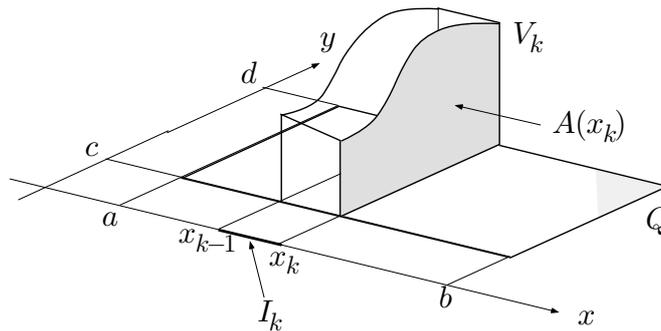


Fig. 4.5.2

Für das gesuchte Gesamtvolumen des Kuchens $K_{Q,f}$ erhalten wir damit die Näherungsformel

$$\int_Q f d\mu = \sum_{k=1}^N V_k \doteq \sum_{k=1}^N A(x_k) \mu(I_k) . \quad (2)$$

Die letzte Summe ist eine Riemannsche Summe für das Integral

$$\int_a^b A(x) dx .$$

Ersetzen wir sie also durch dieses Integral, so geht (2) über in

$$\int_Q f \, d\mu \doteq \int_a^b A(x) \, dx ,$$

und mit (1) erhalten wir schließlich

$$\int_Q f \, d\mu \doteq \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx .$$

Da die betrachteten Approximationen durch Verfeinerung der Zerlegung \mathcal{Z} beliebig genau gemacht werden können, trifft hier in Wirklichkeit das Gleichheitszeichen zu. Damit haben wir gezeigt:

(4.14) *Ist $Q := [a, b] \times [c, d]$ ein Rechteck in der (x, y) -Ebene, so gilt*

$$\int_Q f(x, y) \, d\mu(x, y) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx .$$

Aus Symmetriegründen gilt dann natürlich auch

$$\int_Q f(x, y) \, d\mu(x, y) = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy .$$

Die Aufgabe, eine Funktion von zwei Variablen über ein Rechteck zu integrieren, ist damit zurückgeführt auf zwei hintereinandergeschaltete Integrationen, bei denen nur je *eine* Variable betroffen ist. Für diese beiden einfachen Integrale stehen die Methoden des Abschnitts 4.3 zur Verfügung.

Es ist üblich, bei mehrfachen Integralen die Klammern um innere Integrale wegzulassen. Wir verabreden also für das folgende die Abkürzung

$$\left(\int \dots dx \right) =: \int \dots dx .$$

① Es soll das Volumen $\mu(K)$ des Körpers

$$K := \{ (x, y, z) \mid 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3, 0 \leq z(x+y) \leq 1 \}$$

berechnet werden. — K ist offensichtlich der Kuchen $K_{Q,f}$ zu

$$Q := [1, 2] \times [1, 3], \quad f(x, y) := \frac{1}{x+y} ;$$

somit läßt sich das Volumen $\mu(K)$ in folgender Weise als Integral darstellen:

$$\mu(K) = \int_Q \frac{1}{x+y} d\mu(x,y) = \int_1^2 \int_1^3 \frac{1}{x+y} dy dx .$$

Während der Evaluation des inneren Integrals ist x als Konstante zu behandeln. Man erhält

$$\int_1^3 \frac{1}{x+y} dy = \log(x+y) \Big|_{y=1}^{y=3} = \log(x+3) - \log(x+1)$$

und somit weiter

$$\mu(K) = \int_1^2 (\log(x+3) - \log(x+1)) dx .$$

Substituieren wir hier einmal $x+3 := t$ und einmal $x+1 := t$, so kommt (siehe Beispiel 4.3.③):

$$\begin{aligned} \mu(K) &= \int_4^5 \log t dt - \int_2^3 \log t dt = t(\log t - 1) \Big|_4^5 - t(\log t - 1) \Big|_2^3 \\ &= 5(\log 5 - 1) - 4(\log 4 - 1) - 3(\log 3 - 1) + 2(\log 2 - 1) \\ &= \log \frac{5^5}{2^6 \cdot 3^3} = 0.5925 . \end{aligned}$$

○

② Wir berechnen das Integral

$$J := \int_W \cos(x+y+z) dV$$

über den Würfel $W := [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]^3$ im (x, y, z) -Raum. Satz (4.14) läßt sich natürlich sinngemäß auf die dreidimensionale Situation übertragen: Es gilt

$$J = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x+y+z) dz dy dx .$$

Für das innerste Integral erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x+y+z) dz &= \sin(x+y+z) \Big|_{z=-\pi/2}^{z=\pi/2} \\ &= \sin\left(x+y+\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x+y-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2 \cos(x+y) ; \end{aligned}$$

dabei haben wir die Identität

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos \alpha \quad (3)$$

benutzt. Wir berechnen nun das nächstäußere Integral, wobei wir den eben erhaltenen (von x und y abhängigen) Wert des innersten Integrals einsetzen:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2 \cos(x+y) dy &= 2 \sin(x+y) \Big|_{y=-\pi/2}^{y=\pi/2} \\ &= 2 \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \right) = 4 \cos x, \end{aligned}$$

zuletzt wieder nach (3). Damit ergibt sich schließlich

$$J = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4 \cos x dx = 4 \sin x \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 8. \quad \circ$$

Integrale über allgemeine ebene Bereiche

Ist der Integrationsbereich B kein achsenparalleles Rechteck bzw. kein Quader, so wird die Berechnung des Integrals

$$\int_B f(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x})$$

wesentlich aufwendiger, da die Information über die genaue geometrische Gestalt von B an geeigneter Stelle in die Rechnung einzubringen ist.

Wir wollen einen beschränkten Bereich B der (x, y) -Ebene **y -einfach** nennen, wenn er sich mit Hilfe von zwei stetigen Funktionen $\phi(\cdot)$ und $\psi(\cdot)$ in der Form

$$B = \{ (x, y) \mid a \leq x \leq b, \phi(x) \leq y \leq \psi(x) \} \quad (4)$$

darstellen läßt (Fig. 4.5.3). Analog ist

$$B = \{ (x, y) \mid c \leq y \leq d, \phi(y) \leq x \leq \psi(y) \} \quad (5)$$

ein **x -einfacher Bereich**.

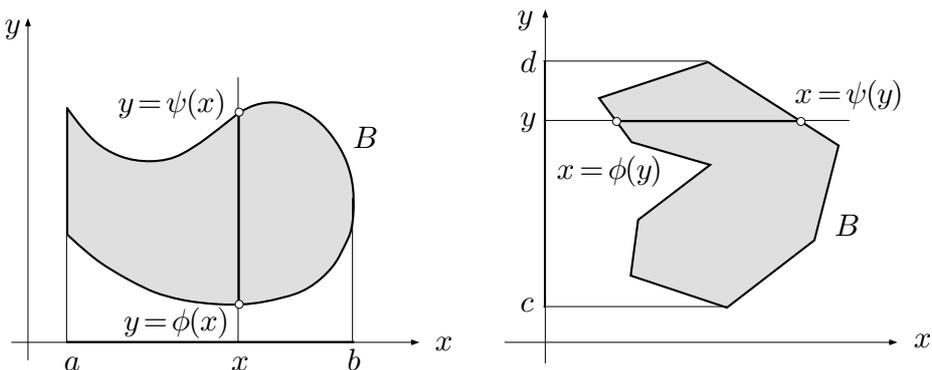


Fig. 4.5.3

Komplizierte Bereiche zerlege man in einfache. Über einfache Bereiche integriert man wie folgt:

(4.15) Ist der Bereich B gegeben durch (4) bzw. durch (5), so gilt

$$\int_B f(x, y) d\mu(x, y) = \int_a^b \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx \quad (6)$$

bzw.

$$\int_B f(x, y) d\mu(x, y) = \int_c^d \left(\int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \right) dy .$$

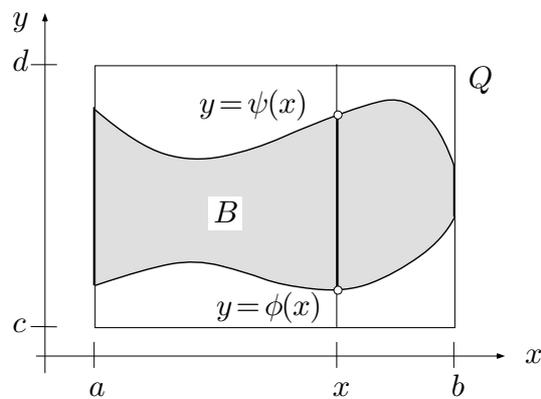


Fig. 4.5.4

□ Aus Symmetriegründen genügt es, (6) zu beweisen. Hierzu legen wir B in ein Rechteck

$$Q := [a, b] \times [c, d]$$

(Fig. 4.5.4) und erweitern f zu einer Funktion $\tilde{f}: Q \rightarrow \mathbb{R}$, indem wir f außerhalb B gleich 0 setzen. Die erweiterte Funktion ist auf der unteren und der oberen Begrenzung von B unstetig. Da diese Linien eine zweidimensionale Nullmenge bilden, können wir das in Kauf nehmen. Es gilt

$$\int_B f d\mu = \int_Q \tilde{f} d\mu$$

und für jedes feste x :

$$\int_c^d \tilde{f}(x, y) dy = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy .$$

Aufgrund von Satz (4.14) läßt sich somit folgende Kette von Gleichungen bilden:

$$\begin{aligned} \int_B f \, d\mu &= \int_Q \tilde{f}(x, y) \, d\mu(x, y) = \int_a^b \int_c^d \tilde{f}(x, y) \, dy \, dx \\ &= \int_a^b \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy \right) dx . \end{aligned} \quad \lrcorner$$

③ Der Bereich

$$B := \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 4, y^2 \leq x \}$$

(Fig. 4.5.5) ist sowohl y -einfach wie x -einfach; das Integral

$$J := \int_B xy^2 \, d\mu(x, y)$$

läßt sich daher auf zwei Arten berechnen.

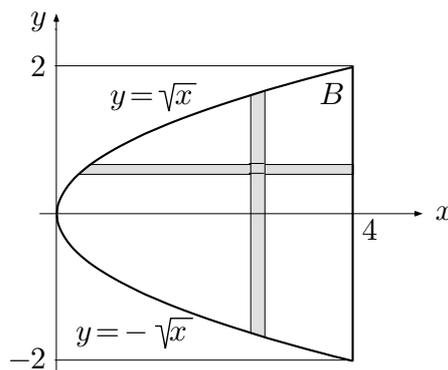


Fig. 4.5.5

(a)
$$J = \int_0^4 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy^2 \, dy \, dx .$$

Das innere Integral hat den Wert

$$x \frac{y^3}{3} \Big|_{y=-\sqrt{x}}^{y=\sqrt{x}} = \frac{2}{3} x^{5/2} ;$$

damit ergibt sich

$$J = \int_0^4 \frac{2}{3} x^{5/2} dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{7} x^{7/2} \Big|_0^4 = \frac{512}{21} .$$

(b)
$$J = \int_{-2}^2 \int_{y^2}^4 xy^2 dx dy .$$

Hier hat das innere Integral den Wert

$$\frac{x^2}{2} y^2 \Big|_{x=y^2}^{x=4} = 8y^2 - \frac{y^6}{2} ,$$

und wir erhalten

$$J = \int_{-2}^2 \left(8y^2 - \frac{y^6}{2} \right) dy = \left(\frac{8}{3} y^3 - \frac{1}{14} y^7 \right) \Big|_{-2}^2 = 2 \left(\frac{8}{3} 2^3 - \frac{1}{14} 2^7 \right) = \frac{512}{21} . \quad \circ$$

④ Ein sechskantiger Bleistift der Dicke 2 wird mit Fräswinkel 45° kegelförmig angespitzt. Wie groß ist das weggefräste Volumen V ? — Es genügt, ein Sechstel

$$B := \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, -\frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq \frac{x}{\sqrt{3}} \right\}$$

der Stirnfläche zu betrachten (Fig. 4.5.6). Bei einem Fräswinkel von 45° wird von der Faser durch den Punkt $(x, y) \in B$ ein Stück der Länge $\sqrt{x^2 + y^2}$ weggefräst. Das gesuchte Volumen ist daher gegeben durch

$$V = 6 \int_B \sqrt{x^2 + y^2} d\mu(x, y) = 6 \int_0^1 \int_{-x/\sqrt{3}}^{x/\sqrt{3}} \sqrt{x^2 + y^2} dy dx . \quad (7)$$

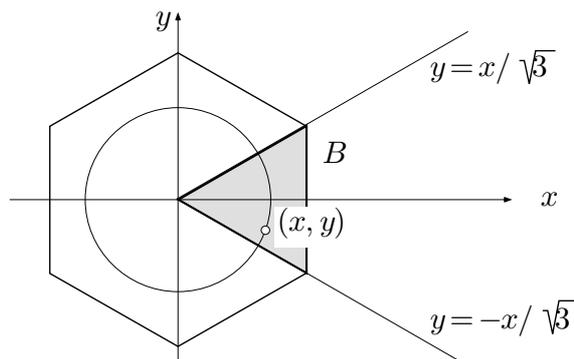


Fig. 4.5.6

Während der Berechnung des inneren Integrals ($=: J(x)$) ist x als Konstante zu behandeln. Wir substituieren

$$y = x \sinh t \quad (-\alpha \leq t \leq \alpha),$$

wobei α so festzulegen ist, daß $x \sinh \alpha = x/\sqrt{3}$ wird; mithin ist

$$\sinh \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

unabhängig von x . Weiter gilt

$$dy = x \cosh t \, dt, \quad \sqrt{x^2 + y^2} = x \cosh t,$$

und wir erhalten

$$J(x) = \int_{-\alpha}^{\alpha} x \cosh t \cdot x \cosh t \, dt = x^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cosh^2 t \, dt.$$

Nun ist nach 4.3.(16)

$$\begin{aligned} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cosh^2 t \, dt &= \frac{1}{2} (\cosh t \sinh t + t) \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \cosh \alpha \sinh \alpha + \alpha \\ &= \sqrt{\frac{1}{3} + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arsinh} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} + \log \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{1}{3} + 1} \right) \end{aligned}$$

und somit

$$J(x) = x^2 \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \log 3 \right).$$

Setzen wir das in (7) ein, so ergibt sich schließlich

$$V = 6 \int_0^1 \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \log 3 \right) x^2 \, dx = 6 \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \log 3 \right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3} + \log 3 = 2.4319.$$

Es scheint, daß man einen Bleistiftspitzer auch zur Berechnung von Logarithmen verwenden kann. \bigcirc

Integrale über räumliche Bereiche

Wir können uns nun auch an Integrale über beliebige *räumliche* Bereiche heranwagen. Es sei $B \subset \mathbb{R}^3$ ein derartiger Bereich und B' die Projektion von B auf die (x, y) -Ebene; B' ist ein ebener Bereich. Wir nennen B **z -einfach**, wenn sich B mit Hilfe von zwei stetigen Funktionen

$$\phi(\cdot, \cdot), \quad \psi(\cdot, \cdot) : \quad B' \rightarrow \mathbb{R}$$

in der Form

$$B = \{ (x, y, z) \mid (x, y) \in B', \phi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y) \} \quad (8)$$

schreiben läßt (Fig. 4.5.7). Ist zum Beispiel

$$B := \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \}$$

die Vollkugel vom Radius a , so ist

$$B' = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2 \}$$

eine Kreisscheibe, und man hat

$$B = \{ (x, y, z) \mid (x, y) \in B', -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \} .$$

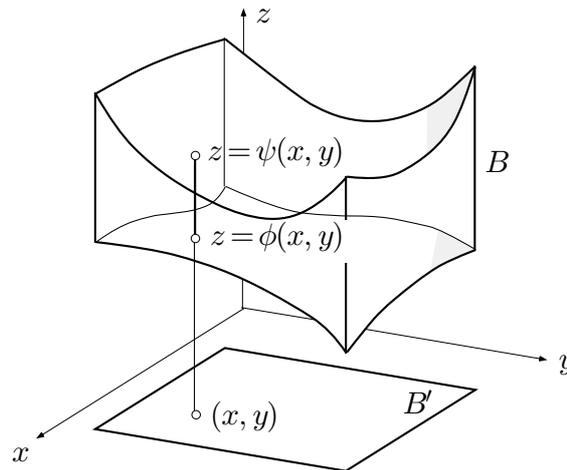


Fig. 4.5.7

Die folgende Formel reduziert ein Integral über den räumlichen Bereich B in der erwarteten Weise. Das äußere Integral über den ebenen Bereich B' ist nach Satz (4.15) weiterzubehandeln; im Ganzen sind also drei Integrationen erforderlich.

(4.16) Ist der z -einfache Bereich B gegeben durch (8), so gilt

$$\int_B f(x, y, z) d\mu(x, y, z) = \int_{B'} \left(\int_{\phi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right) d\mu(x, y) .$$

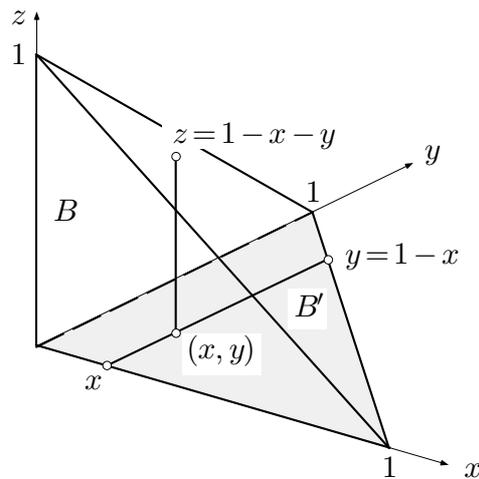


Fig. 4.5.8

⑤ Es soll das Trägheitsmoment Θ des mit Masse der Dichte 1 belegten Oktaeders

$$P := \{ (x, y, z) \mid |x| + |y| + |z| \leq 1 \}$$

bezüglich der z -Achse bestimmt werden, also das Integral

$$\Theta := \int_P (x^2 + y^2) d\mu(x, y, z).$$

Aus verschiedenen Symmetriegründen ist

$$\Theta = 8 \int_B (x^2 + y^2) d\mu(x, y, z) = 16 \int_B x^2 d\mu(x, y, z),$$

wobei B den im ersten Oktanten gelegenen Teil von P bezeichnet (Fig. 4.5.8). Der Figur entnimmt man folgende Beschreibungen von B und von B' :

$$B = \{ (x, y, z) \mid (x, y) \in B', 0 \leq z \leq 1 - x - y \},$$

$$B' = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x \}.$$

Damit erhalten wir

$$\Theta = 16 \int_{B'} \left(\int_0^{1-x-y} x^2 dz \right) d\mu(x, y).$$

Das innere Integral ($=: J(x, y)$) berechnet sich zu

$$J(x, y) = x^2 z \Big|_{z=0}^{z=1-x-y} = x^2(1-x-y),$$

Es genügt, die x -Koordinate ξ des Schwerpunkts zu bestimmen. Die Momentengleichung 4.1.(12) lautet:

$$\xi \int_K 1 d\mu(x, y, z) = \int_K x d\mu(x, y, z),$$

oder wegen (9):

$$\xi \left(\int_W d\mu - \int_B d\mu \right) = \int_W x d\mu - \int_B x d\mu.$$

Die Integrale über W können "im Kopf" evaluiert werden; beide haben den Wert 8. Damit ergibt sich

$$\xi = \frac{8 - \int_B x d\mu}{8 - \int_B d\mu}. \quad (10)$$

Die Reduktion des Bereichs B ist einfacher als diejenige von K . Der Figur entnimmt man

$$B = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in B', \frac{1}{xy} \leq z \leq 2\}$$

mit

$$B' = \{(x, y) \mid \frac{1}{4} \leq x \leq 2, \frac{1}{2x} \leq y \leq 2\}.$$

Im Hinblick auf (10) betrachten wir jetzt für $\sigma := 0$ und $\sigma := 1$ das Integral

$$\begin{aligned} J_\sigma &= \int_B x^\sigma d\mu(x, y, z) = \int_{B'} \left(\int_{1/(xy)}^2 x^\sigma dz \right) d\mu(x, y) \\ &= \int_{B'} x^\sigma \left(2 - \frac{1}{xy} \right) d\mu(x, y) = \int_{1/4}^2 x^\sigma \left(\int_{1/(2x)}^2 \left(2 - \frac{1}{xy} \right) dy \right) dx. \end{aligned}$$

Für das innere Integral ($=: \bar{J}(x)$) erhalten wir

$$\begin{aligned} \bar{J}(x) &= \left(2y - \frac{1}{x} \log y \right) \Big|_{y=1/(2x)}^{y=2} = 4 - \frac{1}{x} \log 2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \log(2x) \\ &= 4 - \frac{1}{x} (1 + 2 \log 2) - \frac{1}{x} \log x. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$J_\sigma = \int_{1/4}^2 x^\sigma \left(4 - \frac{1}{x} (1 + 2 \log 2) - \frac{1}{x} \log x \right) dx, \quad (11)$$

wobei wir noch die Abkürzung

$$\log 2 =: \beta$$

eingeführt haben. Wir setzen zunächst $\sigma := 0$ und haben dann

$$\begin{aligned} \int_B d\mu = J_0 &= \int_{1/4}^2 \left(4 - \frac{1}{x}(1 + 2\beta) - \frac{1}{x} \log x \right) dx \\ &= \left(4x - (1 + 2\beta) \log x - \frac{1}{2} (\log x)^2 \right) \Big|_{1/4}^2 \\ &= 7 - (1 + 2\beta)(\beta - (-2\beta)) - \frac{1}{2}(\beta^2 - (-2\beta)^2) = 7 - 3\beta - \frac{9}{2}\beta^2. \end{aligned}$$

Setzen wir in (11) $\sigma := 1$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_B x d\mu = J_1 &= \int_{1/4}^2 \left(4x - (1 + 2\beta) - \log x \right) dx \\ &= \left(2x^2 - 2\beta x - x \log x \right) \Big|_{1/4}^2 \\ &= 8 - \frac{1}{8} - 2\beta \cdot \frac{7}{4} - 2\beta + \frac{1}{4}(-2\beta) = 8 - \frac{1}{8} - 6\beta. \end{aligned}$$

Damit sind die beiden in (10) auftretenden Integrale berechnet, und wir erhalten

$$\xi = \frac{\frac{1}{8} + 6\beta}{1 + 3\beta + \frac{9}{2}\beta^2} = 0.8173.$$

○

Integration in Polarkoordinaten

Oft treten Kreissektoren, Kreisringe und ähnliche Gebilde (Fig. 4.5.10) als Integrationsbereiche auf. Die Beschreibung und vor allem die Reduktion derartiger Bereiche in kartesischen Koordinaten ist aufwendig und schleppt im allgemeinen Wurzelausdrücke in die Rechnung ein. Noch schlimmer ist es, wenn eine Funktion über eine Kugel zu integrieren ist. In kartesischen Koordinaten sieht das folgendermaßen aus:

$$\int_{-a}^a \left(\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \left(\int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

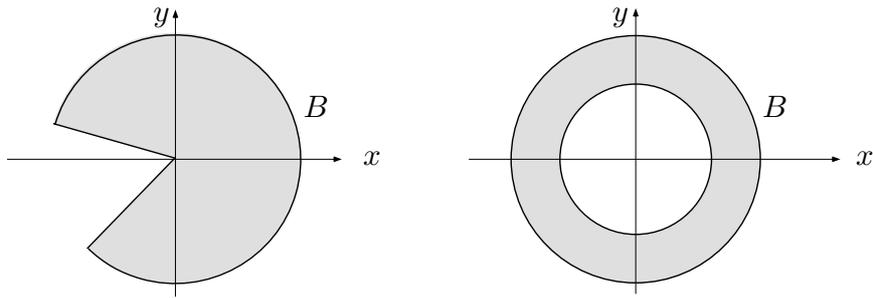


Fig. 4.5.10

Die Rechnung wird wesentlich vereinfacht, wenn man die richtigen Koordinaten verwendet, in den angeführten Beispielen also Polarkoordinaten bzw. Kugelkoordinaten. Der Integrationsbereich ist dann ein Rechteck in der (r, ϕ) -Hilfsebene bzw. ein Quader im (r, ϕ, θ) -Hilfsraum.

Es sei also B ein Bereich in der (x, y) -Ebene und \tilde{B} die Beschreibung von B in Polarkoordinaten (Fig. 4.5.11). Man kann \tilde{B} als “Phantombereich” in der (r, ϕ) -Hilfsebene auffassen. Weiter ist eine Funktion

$$f : B \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y)$$

gegeben; auf Polarkoordinaten umgerechnet erscheint diese Funktion in der Form

$$\tilde{f} : \tilde{B} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (r, \phi) \mapsto \tilde{f}(r, \phi) := f(r \cos \phi, r \sin \phi).$$

Die Funktion \tilde{f} wird gelegentlich als **Pullback** von f auf den Phantombereich \tilde{B} bezeichnet. Gefragt wird nach wie vor nach dem Integral

$$\int_B f(x, y) d\mu(x, y).$$

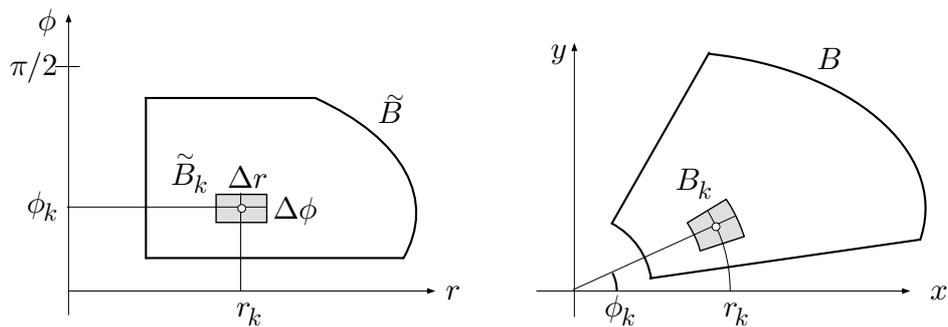


Fig. 4.5.11

Wir approximieren dieses Integral durch Riemannsche Summen, wobei wir als Teilbereiche B_k kleine Kreisring-Sektoren wählen. Ist r_k der mittlere Radius von B_k und ϕ_k der zur Symmetrieachse von B_k gehörige Polarwinkel (Fig. 4.5.12), so gilt

$$\mu(B_k) = r_k \Delta\phi \cdot \Delta r = r_k \mu(\tilde{B}_k),$$

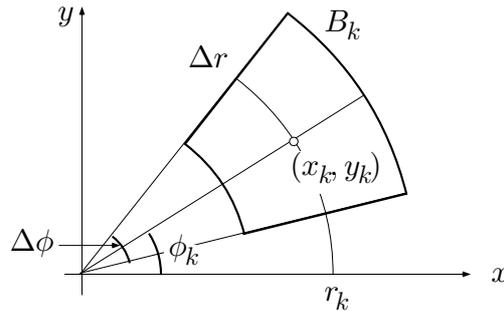


Fig. 4.5.12

wobei \tilde{B}_k das zu B_k gehörige "Phantomrechteck" in der (r, ϕ) -Hilfsebene darstellt. Als Meßpunkt $(x_k, y_k) \in B_k$ wählen wir den Punkt mit Polarkoordinaten r_k, ϕ_k und erhalten dann nacheinander

$$\begin{aligned} \int_B f(x, y) d\mu(x, y) &\doteq \sum_{k=1}^N f(x_k, y_k) \mu(B_k) = \sum_{k=1}^N \tilde{f}(r_k, \phi_k) r_k \mu(\tilde{B}_k) \\ &\doteq \int_{\tilde{B}} \tilde{f}(r, \phi) r d\mu(r, \phi), \end{aligned}$$

denn die letzte Summe läßt sich als Riemannsche Summe für die Funktion

$$g(r, \phi) := \tilde{f}(r, \phi) \cdot r$$

und den Bereich \tilde{B} auffassen. Durch Verfeinerung der Einteilung kann die Genauigkeit dieser Kette von Approximationen beliebig gesteigert werden. Hieraus folgt: Die endständigen Integrale haben in Wirklichkeit denselben Wert. Wir haben bewiesen:

(4.17) *Es sei B ein Bereich in der (x, y) -Ebene und \tilde{B} seine Beschreibung in Polarkoordinaten; weiter sei $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und \tilde{f} ihr Ausdruck in Polarkoordinaten. Dann gilt*

$$\int_B f(x, y) d\mu(x, y) = \int_{\tilde{B}} \tilde{f}(r, \phi) r d\mu(r, \phi).$$

Ist insbesondere B ein r -einfacher Sektor, das heißt:

$$\tilde{B} = \{(r, \phi) \mid \alpha \leq \phi \leq \beta, p(\phi) \leq r \leq q(\phi)\}$$

(Fig. 4.5.13), so gilt

$$\int_B f(x, y) d\mu(x, y) = \int_\alpha^\beta \int_{p(\phi)}^{q(\phi)} \tilde{f}(r, \phi) r dr d\phi .$$

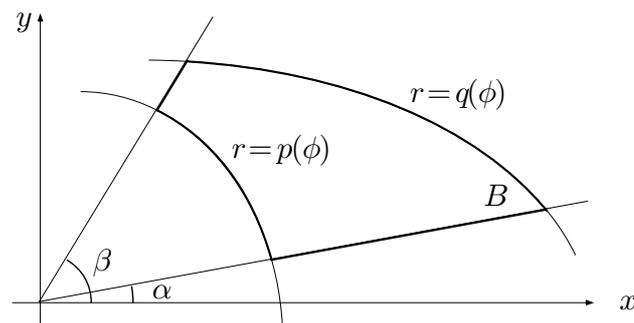


Fig. 4.5.13

⑦ Wir betrachten die Funktion

$$f(x, y) := e^{-x^2-y^2}$$

auf den Bereichen

$$B_R := \{(x, y) \mid x, y \geq 0; x^2 + y^2 \leq R^2\}, \quad Q_R := [0, R]^2$$

(Fig. 4.5.14). Gemäß (4.17) ist

$$\int_{B_R} f(x, y) d\mu(x, y) = \int_{\tilde{B}_R} \tilde{f}(r, \phi) r d\mu(r, \phi) = \int_0^{\pi/2} \int_0^R e^{-r^2} r dr d\phi .$$

Das innere Integral hat den Wert

$$-\frac{1}{2}e^{-r^2} \Big|_0^R = \frac{1}{2}(1 - e^{-R^2}),$$

unabhängig von ϕ . Damit ergibt sich

$$\int_{B_R} f d\mu = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2}) .$$

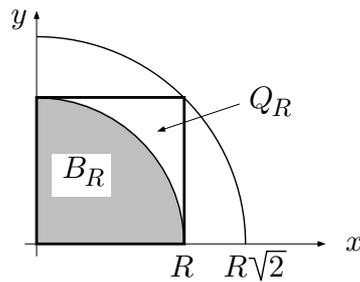


Fig. 4.5.14

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \int_{Q_R} f \, d\mu &= \int_0^R \int_0^R e^{-x^2-y^2} \, dy \, dx = \int_0^R e^{-x^2} \left(\int_0^R e^{-y^2} \, dy \right) dx \\ &= \left(\int_0^R e^{-x^2} \, dx \right)^2, \end{aligned}$$

denn das innere Integral hängt nicht von x ab.

Da f durchwegs positiv ist, gilt

$$\int_{B_R} f \, d\mu \leq \int_{Q_R} f \, d\mu \leq \int_{B_{\sqrt{2}R}} f \, d\mu.$$

Wir erhalten daher

$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2}) \leq \left(\int_0^R e^{-x^2} \, dx \right)^2 \leq \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2R^2}),$$

und der Grenzübergang $R \rightarrow \infty$ liefert

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Wir haben also dieses uneigentliche Integral ausrechnen können, obwohl uns die Stammfunktionen von e^{-x^2} nicht zur Verfügung stehen. Zum Schluß verwandeln wir dieses Integral durch die Substitution

$$x := t^{1/2} \quad (0 \leq t < \infty), \quad dx := \frac{1}{2}t^{-1/2} \, dt$$

in das Integral

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t} t^{-1/2} \, dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

und erhalten den früher versprochenen Gammawert

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

○

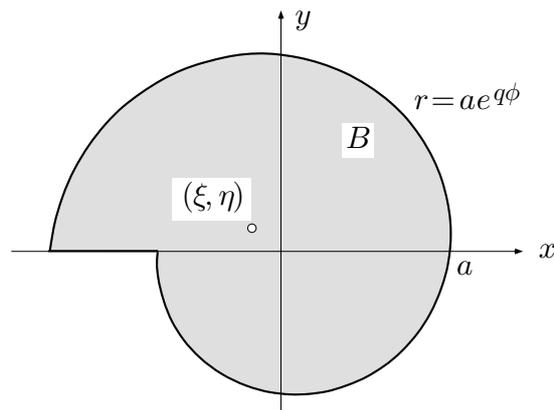


Fig. 4.5.15

⑧ Der in Fig. 4.5.15 dargestellte Exzenter B besitzt folgende Beschreibung in Polarkoordinaten:

$$\tilde{B} = \{(r, \phi) \mid -\pi \leq \phi \leq \pi, 0 \leq r \leq ae^{q\phi}\}. \quad (12)$$

Es soll der Schwerpunkt (ξ, η) von B bestimmt werden. — Zur Vereinfachung der Rechnung schreiben wir

$$x + iy =: z, \quad \xi + i\eta =: \zeta$$

und erhalten folgende komplexe Version der Momentengleichung:

$$\zeta \int_B d\mu(x, y) = \int_B z d\mu(x, y).$$

Somit ist

$$\zeta = \frac{J_1}{J_0} \quad (13)$$

mit

$$J_0 := \int_B d\mu(x, y) = \int_{\tilde{B}} r d\mu(r, \phi),$$

$$J_1 := \int_B z d\mu(x, y) = \int_{\tilde{B}} re^{i\phi} r d\mu(r, \phi),$$

wobei wir die beiden Integrale gemäß (4.17) auf Polarkoordinaten umgeschrieben haben.

Aufgrund von (12) ist

$$J_0 = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{ae^{q\phi}} r dr d\phi.$$

Das innere Integral hat den Wert

$$\frac{r^2}{2} \Big|_{r:=0}^{r:=ae^{q\phi}} = \frac{a^2}{2} e^{2q\phi} ;$$

somit ergibt sich

$$J_0 = \frac{a^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2q\phi} d\phi = \frac{a^2}{4q} e^{2q\phi} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{a^2}{2q} \sinh(2q\pi) .$$

Zweitens hat man

$$J_1 = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\phi} \left(\int_0^{ae^{q\phi}} r^2 dr \right) d\phi .$$

Das innere Integral hat hier den Wert

$$\frac{r^3}{3} \Big|_0^{ae^{q\phi}} = \frac{a^3}{3} e^{3q\phi} ,$$

und es ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{a^3}{3} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(3q+i)\phi} d\phi = \frac{a^3}{3(3q+i)} e^{(3q+i)\phi} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{a^3(3q-i)}{3(9q^2+1)} (-e^{3q\pi} + e^{-3q\pi}) = \frac{2a^3 \sinh(3q\pi)}{3(9q^2+1)} (-3q+i) . \end{aligned}$$

Setzen wir die für J_0 und J_1 erhaltenen Werte in (13) ein, so folgt

$$\zeta = \frac{4aq}{3(9q^2+1)} \frac{\sinh(3q\pi)}{\sinh(2q\pi)} (-3q+i) .$$

Die reellen Koordinaten ξ , η des Schwerpunkts lassen sich hier unmittelbar ablesen.



Integration in Kugelkoordinaten

Zum Schluß zeigen wir noch, wie räumliche Integrale auf Kugelkoordinaten umzurechnen sind. In den folgenden Formeln hat der Äquator die geographische Breite $\theta = 0$.

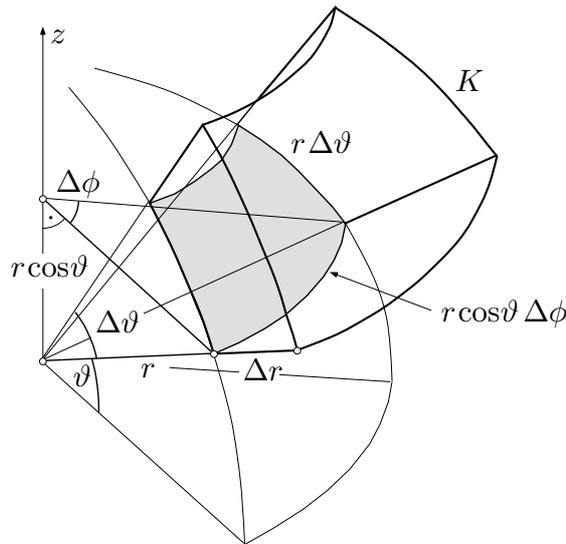


Fig. 4.5.16

(4.18) Es sei B ein Bereich im (x, y, z) -Raum und \tilde{B} seine Beschreibung in Kugelkoordinaten. Weiter sei $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und \tilde{f} ihr Ausdruck in Kugelkoordinaten. Dann gilt

$$\int_B f(x, y, z) d\mu(x, y, z) = \int_{\tilde{B}} \tilde{f}(r, \phi, \theta) r^2 \cos \theta d\mu(r, \phi, \theta).$$

□ Wir begnügen uns mit der “stenographischen” Herleitung dieser Formel und betrachten dazu ein Klötzchen K im (x, y, z) -Raum, das im (r, ϕ, θ) -Raum als achsenparalleler Quader erscheint (Fig. 4.5.16). Dieses Klötzchen ist näherungsweise ein Quader mit Seitenlängen Δr , $r \cos \theta \Delta \phi$ und $r \Delta \theta$; es besitzt daher das Volumen

$$d\mu(x, y, z) = \Delta r \cdot r \cos \theta \Delta \phi \cdot r \Delta \theta = r^2 \cos \theta d\mu(r, \phi, \theta). \quad \lrcorner$$

⑨ Die Kugelrinde B mit dem “Phantombereich”

$$\tilde{B} := \left\{ (r, \phi, \theta) \mid r_i \leq r \leq r_a, 0 \leq \phi \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

sei mit Masse der Dichte ρ belegt. An der Stelle $(0, 0, -R)$, $R \geq 0$, befinde sich ein Massenpunkt m , der von der Rinde mit der Gravitationskraft

$$\mathbf{K} = (0, 0, K)$$

angezogen wird (Fig. 4.5.17). Dieses K soll nun berechnet werden.

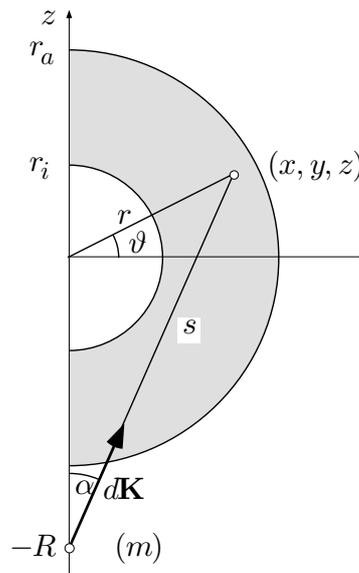


Fig. 4.5.17

Bezeichnet s den Abstand des Massenpunktes von dem variablen Punkt $(x, y, z) \in B$, so gilt nach dem Cosinussatz:

$$s^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = R^2 + r^2 + 2Rr \sin \theta .$$

Nach dem Gravitationsgesetz wirkt ein an der Stelle $(x, y, z) \in B$ befindliches Volumeneilchen $d\mu(x, y, z)$ auf den Massenpunkt m mit einer Kraft $d\mathbf{K}$ vom Betrag

$$|d\mathbf{K}| = \frac{\gamma m (\rho d\mu)}{s^2} ,$$

dabei bezeichnet γ die Gravitationskonstante. Die z -Komponente dieser Kraft ist gegeben durch

$$dK = |d\mathbf{K}| \cos \alpha = \gamma m \rho \frac{1}{s^2} \frac{z + R}{s} d\mu ,$$

unabhängig davon, ob sich der Massenpunkt innerhalb oder außerhalb der Rinde befindet. Damit erhalten wir unter Verwendung von Satz (4.18):

$$\begin{aligned} K &= \int dK = \gamma m \rho \int_B \frac{z + R}{s^3} d\mu(x, y, z) \\ &= \gamma m \rho \int_{\tilde{B}} \frac{R + r \sin \theta}{(R^2 + r^2 + 2Rr \sin \theta)^{3/2}} r^2 \cos \theta d\mu(r, \phi, \theta) . \end{aligned}$$

Da der Integrand von ϕ nicht abhängt, liefert die Integration nach ϕ einfach den Faktor 2π , und es bleibt

$$K = 2\pi\gamma m\rho \int_{r_i}^{r_a} r^2 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (R + r \sin \theta) \frac{\cos \theta}{(R^2 + r^2 + 2Rr \sin \theta)^{3/2}} d\theta \right) dr . \quad (14)$$

Integrieren wir das innere Integral ($=: J(r)$) in der angegebenen Weise partiell, so ergibt sich

$$J(r) = (R + r \sin \theta)(R^2 + r^2 + 2Rr \sin \theta)^{-1/2} \left(-\frac{1}{Rr} \right) \Big|_{\theta:=-\pi/2}^{\theta:=\pi/2} \\ + \frac{1}{R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \theta}{(R^2 + r^2 + 2Rr \sin \theta)^{1/2}} d\theta .$$

Der zweite Summand liefert

$$\frac{1}{R}(R^2 + r^2 + 2Rr \sin \theta)^{1/2} \frac{1}{Rr} \Big|_{\theta:=-\pi/2}^{\theta:=\pi/2} ,$$

so daß wir insgesamt folgendes erhalten:

$$J(r) = -\frac{1}{Rr} + \frac{R-r}{|R-r|} \frac{1}{Rr} + \frac{1}{R^2 r} ((R+r) - |R-r|) .$$

Liegt der Massenpunkt m *innerhalb* der Rinde, so ist $R < r_i \leq r$, und es folgt

$$J(r) = -\frac{1}{Rr} - \frac{1}{Rr} + \frac{1}{R^2 r} ((R+r) - (r-R)) = 0 \quad (r_i \leq r \leq r_a) .$$

Damit ist natürlich auch $K = 0$. Hieraus folgt: Eine im Erdinnern befindliche Probemasse m wird nur von dem weiter innen gelegenen Teil der Erdmasse angezogen.

Liegt jedoch der Massenpunkt m *außerhalb* der Rinde, so ist $R > r_a \geq r$, und es folgt

$$J(r) = -\frac{1}{Rr} + \frac{1}{Rr} + \frac{1}{R^2 r} ((R+r) - (R-r)) = \frac{2}{R^2} .$$

Setzen wir dies in (14) ein, so ergibt sich

$$K = 2\pi\gamma m\rho \frac{2}{R^2} \int_{r_i}^{r_a} r^2 dr = \frac{\gamma m}{R^2} \rho \frac{4\pi}{3} (r_a^3 - r_i^3) \\ = \frac{\gamma m (\rho \mu(B))}{R^2} .$$

In Worten: Liegt der Massenpunkt m außerhalb der Rinde, so wird er von ihr genau so angezogen, wie wenn die Gesamtmasse der Rinde in ihrem Mittelpunkt konzentriert wäre. \bigcirc

Aufgaben

1. Bei den folgenden Integralen ist die Reihenfolge der Integrationen umzukehren: Die innere Variable soll zur äußeren werden. Wie lautet jeweils das neue Integral? Figuren!

$$(a) \int_{-1}^2 \int_{-x}^{2-x^2} f(x, y) dy dx, \quad (b) \int_0^2 \int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} f(x, y) dx dy .$$

2. Es geht hier um dreifache Integrale

$$\int_B f(x, y, z) d\mu(x, y, z) = \int_{\dots}^{\dots} \left(\int_{\dots}^{\dots} \left(\int_{\dots}^{\dots} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx .$$

Bestimme die mit ‘...’ angedeuteten Integrationsgrenzen für die folgenden Bereiche B :

- (a) der durch die Flächen $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, $z = h$ begrenzte Zylinder,
 (b) der durch die Flächen $x^2 + y^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, $x + y + z = 1$ begrenzte schief abgeschnittene Zylinder,
 (c) der durch $\frac{x}{2} \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ begrenzte schief abgeschnittene Kreiskegel.
3. In der nachstehenden Formel bezeichnen r , ϕ Polarkoordinaten. Was hat man an den offengelassenen Stellen einzusetzen?

$$\int_0^2 \int_0^x f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy dx = \int_{?}^? \int_{?}^? ? dr d\phi .$$

4. Berechne die folgenden Integrale:

$$(a) \int_B \cos y d\mu(x, y), \quad B := \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi^2 - y^2\},$$

$$(b) \int_Q \frac{y}{\sqrt{4 - x^2 y^2}} d\mu(x, y), \quad Q := [0, 1]^2,$$

$$(c) \int_B \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} d\mu(x, y), \quad B := \{(x, y) \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\} .$$

5. Berechne das Integral $\int_B e^{y^2} d\mu(x, y)$ für den in Figur 4.5.18 skizzierten Bereich B . (Hinweis: Integrationsreihenfolge geeignet wählen.)

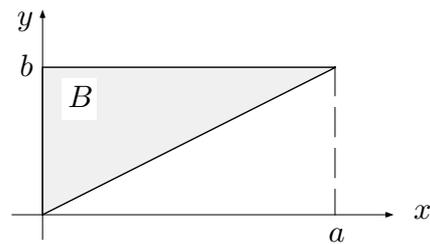


Fig. 4.5.18

6. Es bezeichne $B_{2,R} \subset \mathbb{R}^2$ die Kreisscheibe, $B_{3,R} \subset \mathbb{R}^3$ die Vollkugel vom Radius R mit Zentrum $\mathbf{0}$. Verifiziere, was folgt: Hängt die Funktion $f: B_{n,R} \rightarrow \mathbb{R}$ in Wirklichkeit nur von r ab, so gilt

$$\int_{B_{2,R}} f \, d\mu = 2\pi \int_0^R \tilde{f}(r) r \, dr \quad \text{bzw.} \quad \int_{B_{3,R}} f \, d\mu = 4\pi \int_0^R \tilde{f}(r) r^2 \, dr .$$

7. Berechne das Trägheitsmoment der in Figur 4.5.19 skizzierten Torusfläche (Flächendichte :=1) bezüglich der z -Achse.
8. Durch das Zentrum einer Kugel wurde ein zylindrisches Loch der Länge a gebohrt. Berechne das Volumen des Restkörpers.
9. (a) Verifiziere die folgende Formel für den Abstand d ($= d(x, y, z)$) des Punktes (x, y, z) von der Geraden durch $(0, 0, 0)$ und $(1, 1, 1)$:

$$d^2 = \frac{2}{3}(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) .$$

- (b) Berechne das Trägheitsmoment des Einheitswürfels (Dichte := 1) bezüglich einer Raumdiagonalen.

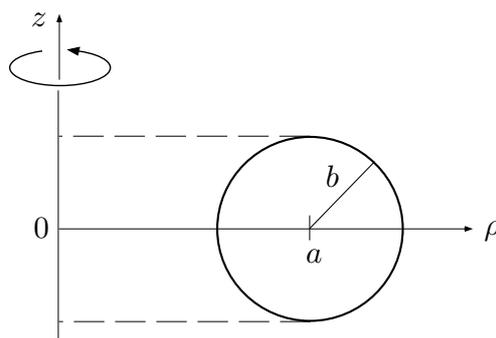


Fig. 4.5.19

10. Ein Kreiszyylinder vom Querschnittsdurchmesser a und ein Prisma mit quadratischem Querschnitt der Stärke a durchdringen sich in der Weise, daß die Achse des Zylinders zwei Gegenkanten des Prismas senkrecht schneidet. Berechne das Volumen des Durchdringungskörpers. (*Hinweis:* Wähle die Disposition der Figur 4.5.20.)

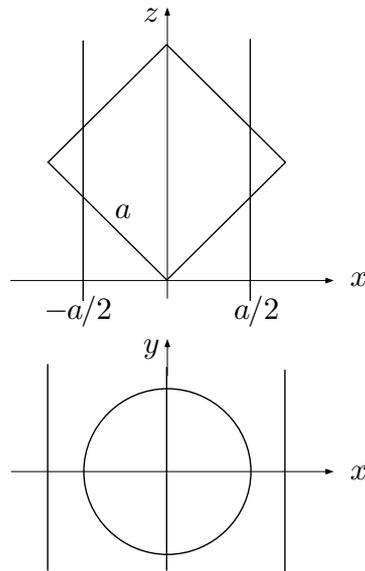


Fig. 4.5.20

4.6 Differentialgleichungen III

Weiteres zur allgemeinen Theorie

Wir haben in Abschnitt 3.5 den Begriff der Differentialgleichung eingeführt und erklärt, daß die sogenannten konstituierenden Gleichungen eines realen physikalischen (biologischen, ökonomischen, ...) Systems von endlich vielen Freiheitsgraden in aller Regel Differentialgleichungen oder Systeme von Differentialgleichungen sind. Wir haben den geometrischen Gehalt einer Differentialgleichung

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

interpretiert als Vorgabe eines Richtungsfeldes in (einem Gebiet) der (x, y) -Ebene. Gesucht sind diejenigen Kurven

$$\gamma: x \mapsto (x, y(x)),$$

die in allen ihren Punkten die dort vorgeschriebene Steigung aufweisen:

$$\forall x: y'(x) = f(x, y(x)),$$

das heißt: sich kontinuierlich dem Richtungsfeld anschmiegen. Schließlich haben wir in Abschnitt 3.6 eine wichtige Klasse von Differentialgleichungen (lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten) ausführlich diskutiert und dafür Lösungsverfahren angegeben.

Die Auflösung einer Differentialgleichung wird auch deren **Integration** genannt. Im allgemeinen werden nämlich elementar lösbare Differentialgleichungen in der Weise geknackt, daß sie durch geeignete Substitutionen usw. auf die Form

$$\frac{du}{dt} = \phi(t) \quad (1')$$

gebracht werden, wobei die neuen Variablen t und u "umkehrbar" mit x und y verknüpft sind. Die besonders einfache Differentialgleichung (1') hat natürlich die Lösungen

$$u = \int \phi(t) dt = \Phi(t) + \text{const.}, \quad (2)$$

$\Phi(\cdot)$ eine Stammfunktion von $\phi(\cdot)$. Am Schluß sind diese Lösungen wieder auf x und y umzurechnen. Man sagt dann, man habe die gegebene Differentialgleichung (1) auf die **Quadratur** (1') \longrightarrow (2) zurückgeführt.

Die Theorie der vorweg behandelten linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ist gerade dadurch gekennzeichnet, daß sie ohne Verwendung des Integralbegriffs auskommt: Es genügt, den richtigen Ansatz für die Lösungsfunktionen hinzuschreiben. Inzwischen haben wir aber integrieren gelernt, so daß weitere Typen von Differentialgleichungen der Behandlung zugänglich werden. Bevor wir daran gehen, weisen wir noch auf einen Sachverhalt von mehr grundsätzlich-theoretischem Interesse hin:

(4.19) (a) *Das Anfangswertproblem*

$$y' = f(x, y), \quad y(0) = 0 \quad (3)$$

ist äquivalent mit der Integralgleichung

$$y(x) \equiv \int_0^x f(t, y(t)) dt \quad (4)$$

für die unbekannte Funktion $y(\cdot)$.

Dies ist folgendermaßen zu interpretieren: Wird die Lösung $y(\cdot)$ des Anfangswertproblems (3) rechter Hand in (4) eingesetzt und der entstehende Ausdruck nach t integriert von 0 bis zur variablen oberen Grenze x , so wird gerade wieder die Funktion $y(\cdot)$ (als Funktion von x) ausgeworfen. Umgekehrt: Eine Funktion $y(\cdot)$, die derart durch das Integral (4) reproduziert wird, ist automatisch Lösung von (3).

□ Ist $y(\cdot)$ Lösung von (3), so gilt

$$\forall t: \quad y'(t) = f(t, y(t)),$$

und es folgt durch Integration von 0 bis x :

$$y(x) - y(0) = \int_0^x f(t, y(t)) dt,$$

wegen $y(0) = 0$ also (4). — Gilt umgekehrt (4), so ist jedenfalls $y(0) = 0$, und durch Ableitung des Integrals nach der oberen Grenze folgt

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Da dies für alle x zutrifft, ist $y(\cdot)$ tatsächlich die Lösung des Anfangswertproblems (3). □

(4.19) (b) *Die durch*

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &:= 0, \\ \phi_{n+1}(x) &:= \int_0^x f(t, \phi_n(t)) dt \quad (n \geq 0) \end{aligned}$$

rekursiv definierte Funktionenfolge $(\phi_n(\cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert in einem geeigneten Intervall $] -h, h[$ gegen die Lösung von (3).

(Ohne Beweis) — Das Geheimnis von (4.19)(b) ist folgendes (Fig. 4.6.1): Wird eine "falsche" Funktion $y(t)$ ins Integral (4) eingelesen, so kommt zwar

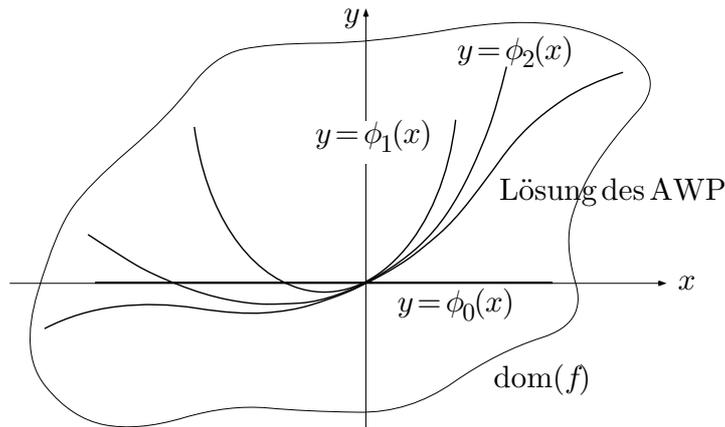


Fig. 4.6.1

nicht die richtige Lösung von (3) heraus, aber immerhin eine bessere Approximation, als es der Input war. In der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen wird mit Hilfe des Iterationsverfahrens (4.19)(b) bewiesen, daß jedes "gute" Anfangswertproblem (3) genau eine Lösung besitzt.

① Für das Anfangswertproblem

$$y' = 1 + y^2 \quad (:= f(x, y)), \quad y(0) = 0$$

erhalten wir folgende Iterationsvorschrift:

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &:= 0, \\ \phi_{n+1}(x) &:= \int_0^x (1 + \phi_n^2(t)) dt. \end{aligned}$$

Es ergibt sich nacheinander

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \int_0^x (1 + \phi_0^2(t)) dt = \int_0^x 1 dt = x, \\ \phi_2(x) &= \int_0^x (1 + \phi_1^2(t)) dt = \int_0^x (1 + t^2) dt = x + \frac{x^3}{3}, \\ \phi_3(x) &= \int_0^x (1 + (t + t^3/3)^2) dt = \int_0^x (1 + t^2 + 2t^4/3 + t^6/9) dt \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + ?x^7, \\ \phi_4(x) &= \int_0^x (1 + (t + t^3/3 + 2t^5/15 + ?t^7)^2) dt \\ &= \int_0^x \left(1 + t^2 + \frac{2t^4}{3} + \left(\frac{4}{15} + \frac{1}{9}\right)t^6 + ?t^8 \right) dt \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{7 \cdot 45} + ?x^9. \end{aligned}$$

Da die Polynome $\phi_n(\cdot)$ in erster Linie für kleine x betrachtet werden, haben wir ihre hintersten Koeffizienten zum Teil nicht mehr berechnet.

Wie man leicht verifiziert, ist

$$y(x) = \tan x$$

die exakte Lösung des gestellten Anfangswertproblems. Der Tangens besitzt an der Stelle 0 die Taylor-Entwicklung

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + ?x^9 ;$$

die berechneten Iterierten ϕ_0, \dots, ϕ_4 stellen also für kleine x in der Tat von Mal zu Mal bessere Approximationen an die exakte Lösung dar. \circ

Lineare Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten

Wir behandeln nun die allgemeine **lineare Differentialgleichung erster Ordnung**:

$$y' = p(x)y + q(x) \quad (=: f(x, y)) ; \quad (5)$$

dabei sind $p(\cdot)$ und $q(\cdot)$ gegebene stetige Funktionen von x . Sind $p(\cdot)$ und $q(\cdot)$ auf dem Intervall $]a, b[$ definiert, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, so ist $\text{dom}(f)$ der vertikale Streifen $]a, b[\times \mathbb{R}$. Durch jeden Punkt dieses Streifens geht genau eine Lösungskurve. Aus den folgenden Formeln geht überdies hervor, daß jede einzelne Lösung auf dem ganzen Intervall $]a, b[$ definiert ist und nicht in einem inneren Punkt "explodieren" kann (Fig. 4.6.2). Dieser Sachverhalt trifft auch bei linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung zu.

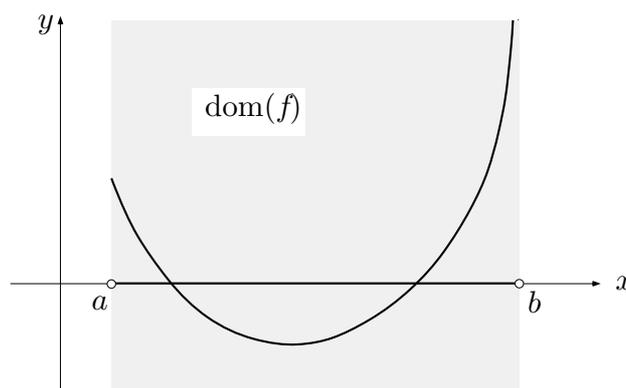


Fig. 4.6.2

② Bei der *nichtlinearen* Differentialgleichung

$$y' = y^2 \quad (=: f(t, y))$$

ist $\text{dom}(f) = \mathbb{R}^2$. Die durch den Anfangspunkt $(0, 1)$ gehende Lösung ist gegeben durch

$$y(t) = \frac{1}{1-t}$$

(Fig. 4.6.3), “explodiert” also schon nach einer Sekunde. ○

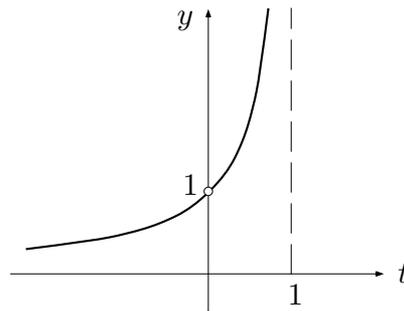


Fig. 4.6.3

Wir betrachten zunächst die **homogene lineare Differentialgleichung**

$$y' = p(x)y \quad (a < x < b) . \quad (6)$$

Die spezielle Gleichung

$$y' = \lambda y$$

mit konstantem Koeffizienten $\lambda \in \mathbb{R}$ ist von dieser Art. Sie besitzt bekanntlich als Lösungen die Exponentialfunktionen

$$y(x) = C e^{\lambda x}, \quad C \in \mathbb{R} .$$

Wir machen daher für eine Lösung $Y(\cdot)$ der Gleichung (6) den Ansatz

$$Y(x) := e^{P(x)}$$

mit einer neuen unbekanntenen Funktion $P(\cdot)$. Tragen wir dies in (6) ein, so muß identisch in x gelten:

$$P'(x) e^{P(x)} = p(x) e^{P(x)},$$

und das ist erfüllt, wenn für $P(\cdot)$ eine Stammfunktion von $p(\cdot)$ gewählt wird. Übrigens ist dann $Y(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$.

Nun ist (6) eine homogene lineare Differentialgleichung. Mit $Y(\cdot)$ sind daher auch alle Vielfachen $CY(\cdot)$, $C \in \mathbb{R}$ fest, Lösungen von (6), und zwar sind das schon alle Lösungen, da durch jeden Punkt von $]a, b[\times \mathbb{R}$ genau eine Kurve dieser Schar geht (Fig. 4.6.4). Wir haben bewiesen:

(4.20) Die allgemeine Lösung von (6) ist gegeben durch

$$y(x) = C e^{P(x)}, \quad C \in \mathbb{R};$$

dabei bezeichnet $P(\cdot)$ irgendeine Stammfunktion von $p(\cdot)$.

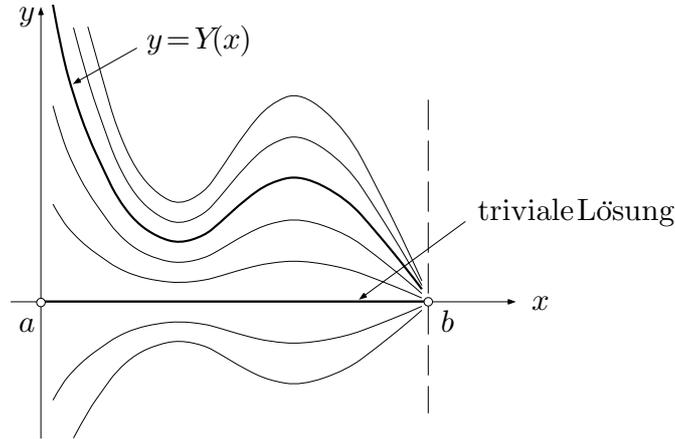


Fig. 4.6.4

③ Man bestimme die durch den Punkt $(\frac{5}{4}, 1)$ gehende Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (x > 1). \quad (7)$$

Die Funktion $p(x) := 1/\sqrt{x^2 - 1}$ besitzt die Stammfunktionen

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \text{const.};$$

die allgemeine Lösung von (7) lautet daher

$$y(x) = C e^{\log(x + \sqrt{x^2 - 1})} = C (x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Die Anfangsbedingung liefert für C die Gleichung

$$1 = C \left(\frac{5}{4} + \sqrt{\frac{25}{16} - 1} \right) = 2C,$$

und damit erhalten wir als Lösung des gestellten Anfangswertproblems:

$$y(x) = \frac{1}{2} (x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Dies ist, wie erwartet, für alle $x > 1$ definiert. ○

Wir wenden uns nun der inhomogenen Gleichung (5) zu und weisen zunächst darauf hin, daß Satz (3.18) auch hier gilt:

(4.21) *Es seien $y_s(\cdot)$ eine irgendwie gefundene (“partikuläre”) Lösung der inhomogenen Gleichung (5) und $Y(\cdot)$ eine nichttriviale Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung (6). Dann ist die allgemeine Lösung $y(\cdot)$ der Gleichung (5) gegeben durch*

$$y(x) = CY(x) + y_s(x), \quad C \in \mathbb{R} \quad (8)$$

(= “allgemeine Lösung der homogenen Gleichung plus partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung”).

□ Ist $y(\cdot)$ gegeben durch (8), so gilt

$$y' = CY' + y'_s = CpY + py_s + q = p(CY + y_s) + q = py + q,$$

das heißt: $y(\cdot)$ ist eine Lösung von (5). Umgekehrt: Ist $y(\cdot)$ eine Lösung von (5), so genügt die Funktion $u := y - y_s$ der homogenen Gleichung (6):

$$u' = y' - y'_s = (py + q) - (py_s + q) = p(y - y_s) = pu.$$

Nach Satz (4.20) ist folglich $u = CY$ für ein geeignetes $C \in \mathbb{R}$ und somit $y = CY + y_s$, wie behauptet. □

Gelegentlich kann man tatsächlich eine partikuläre Lösung $y_s(\cdot)$ von (5) erraten. Es gibt aber auch ein systematisches Verfahren zur Bestimmung der allgemeinen Lösung von (5), die sogenannte Methode der **Variation der Konstanten**:

Zunächst soll man die zugehörige homogene Gleichung (6) lösen. Man erhält eine Funktionenschar

$$y(x) = CY(x), \quad C \in \mathbb{R},$$

mit einer gewissen “Basisfunktion” $Y(\cdot) \neq 0$. Für die allgemeine Lösung von (5) macht man nun den Ansatz

$$y(x) := C(x)Y(x) \quad (9)$$

mit einer neuen unbekanntenen Funktion $C(\cdot)$. Trägt man diesen Ansatz in (5) ein, so ergibt sich

$$C'Y + \underbrace{CY'} = \underbrace{pCY} + q.$$

Da Y das homogene Problem (6) löst, fallen hier zwei Terme heraus, und es bleibt für $C(\cdot)$ die einfache Differentialgleichung

$$C'Y(x) = q(x) \quad \text{bzw.} \quad C' = \frac{q(x)}{Y(x)}$$

übrig, die sofort integriert werden kann. Bei dieser Integration wird auch noch eine neue Integrationskonstante C_0 abgesondert. Damit ist gezeigt:

(4.22) Die allgemeine Lösung von (5) hat die Form

$$y(x) = (C(x) + C_0) Y(x);$$

dabei ist $Y(\cdot) \neq 0$ eine Lösung der homogenen Gleichung (6) und $C(\cdot)$ eine Stammfunktion von $q(\cdot)/Y(\cdot)$.

(Die in (4.22) erscheinenden Formeln braucht man sich nicht zu merken, wohl aber den Ansatz (9). Der Rest ergibt sich dann im Anwendungsfall von selbst.)

④ Es soll die durch den Ursprung gehende Lösung der Differentialgleichung

$$y' = x^3 - xy \tag{10}$$

bestimmt werden. — Die zugehörige homogene Gleichung $y' = -xy$ besitzt die Lösungen

$$y(x) = C e^{-x^2/2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Wir machen also für die Lösungen von (10) den Ansatz

$$y(x) := C(x) e^{-x^2/2}$$

und erhalten für $C(\cdot)$ die Bedingung

$$C' e^{-x^2/2} + \underbrace{C e^{-x^2/2} (-x)} = x^3 \underbrace{-x C e^{-x^2/2}},$$

das heißt:

$$C' = x^3 e^{x^2/2}.$$

Dies ist nun unbestimmt zu integrieren:

$$\begin{aligned} C(x) &= \int x^3 e^{x^2/2} dx = 2 \left(\int \underset{\downarrow}{u} \underset{\uparrow}{e^u} du \right)_{u:=x^2/2} = 2(u e^u - \int e^u du) \\ &= 2(u - 1)e^u + \text{const.} = (x^2 - 2)e^{x^2/2} + C_0. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung von (10) ergibt sich damit zu

$$y(x) = (x^2 - 2) + C_0 e^{-x^2/2}$$

(Fig. 4.6.5). Die durch den Ursprung gehende Lösung

$$y_0(x) = x^2 - 2 + 2e^{-x^2/2}$$

besitzt dort übrigens einen Flachpunkt, denn es ist

$$y_0(x) = x^2 - 2 + 2 \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + ?x^6 \right) = \frac{x^4}{4} + ?x^6.$$

Alle Lösungen nähern sich für $|x| \rightarrow \infty$ asymptotisch der Parabel $y = x^2 - 2$.

○

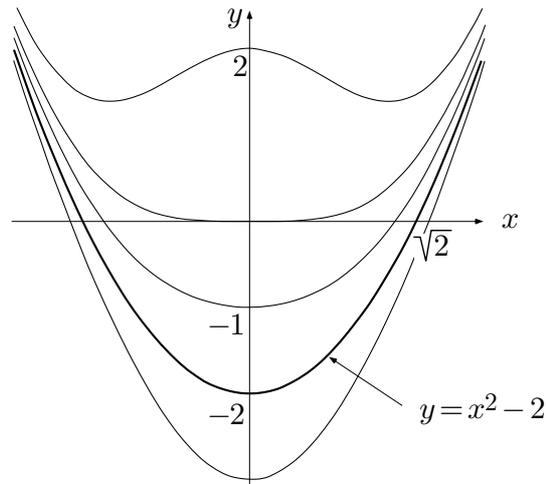


Fig. 4.6.5

Die allgemeine **homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung**,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (a < x < b) \quad (11)$$

läßt sich nicht auf Quadraturen zurückführen. Da derartige Gleichungen in den verschiedensten Zusammenhängen (Schwingungsprobleme, Differentialgeometrie u.a.) auftreten, gehört ihre Theorie zu den am intensivsten erforschten Gebieten der Analysis. Dabei geht es einerseits um die speziellen Funktionen, die durch gewisse spezielle Gleichungen (11) definiert werden (zum Beispiel die trigonometrischen Funktionen, die sogenannten Besselfunktionen u.a.), und andererseits um die qualitativen Eigenschaften (Abstände und Anzahl der Nullstellen u.a.) der Lösungen in Abhängigkeit von Eigenschaften der Koeffizientenfunktionen $p(\cdot)$ und $q(\cdot)$.

Die Gesamtheit \mathcal{L} der Lösungen von (11) ist ein zweidimensionaler Vektorraum. Das bedeutet folgendes (siehe auch Satz **(3.17)**): Kann man sich irgendwie zwei linear unabhängige Lösungen $Y_1(\cdot)$ und $Y_2(\cdot)$ verschaffen, so ist die allgemeine Lösung von (11) gegeben durch

$$y(x) = C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} .$$

Ein korrekter Satz von Anfangsbedingungen, nämlich

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = v_0$$

mit gegebenen Zahlen (x_0, y_0) und v_0 legt die Werte C_1 und C_2 fest und zieht damit eine wohlbestimmte Funktion aus der Lösungsgesamtheit \mathcal{L} heraus.

Randwertprobleme

Anstelle von Anfangsbedingungen, die an *einem* Punkt x_0 angreifen, kann man auch sogenannte **Randbedingungen** formulieren, die an den *zwei* weit voneinander entfernten Punkten a und b der x -Achse gleichzeitig angreifen (Fig. 4.6.6):

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b$$

mit gegebenen Randdaten y_a, y_b .

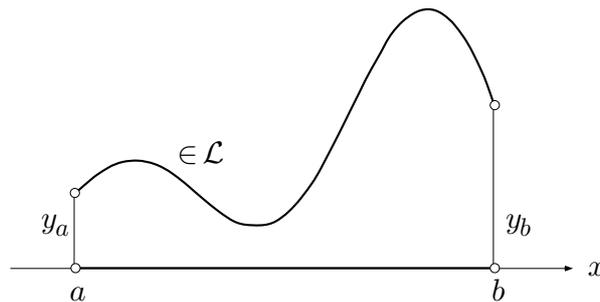


Fig. 4.6.6

Diese Aufgabe ist wesentlich heikler als die erste, und es braucht nicht immer eine Lösung zu geben. Derartige **Randwertprobleme** (oft mit “homogenen” Randdaten $y_a = y_b = 0$) spielen in den Anwendungen eine ungeheure Rolle, und ihre Behandlung bildet wohl den interessantesten Teil der ganzen Theorie. Um zu zeigen, welche neuen Phänomene da auftauchen, behandeln wir ein ganz simples Beispiel, wo wir alles explizit ausrechnen können.

⑤ Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + \omega^2 y = 0 \tag{12}$$

auf dem x -Intervall $[0, 1]$. Es tritt hier ein Parameter $\omega > 0$ auf, der noch eine überraschende Rolle spielen wird. Gegeben sind ferner die Randbedingungen

$$y(0) = y_0, \quad y(1) = y_1. \tag{13}$$

Die allgemeine Lösung von (12) lautet bekanntlich

$$y(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x); \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Die Randbedingungen führen auf das lineare Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{l} A \cos 0 + B \sin 0 = y_0 \\ A \cos \omega + B \sin \omega = y_1 \end{array} \right\} \tag{14}$$

für die Integrationskonstanten A und B . Der ersten Gleichung entnimmt man sofort $A = y_0$, so daß wir mit der Bedingung

$$B \sin \omega = y_1 - y_0 \cos \omega \quad (15)$$

verbleiben. Ist $\sin \omega \neq 0$, so wird dadurch B bestimmt zu

$$B = \frac{y_1 - y_0 \cos \omega}{\sin \omega},$$

und unser Randwertproblem (12)^(13) besitzt dann für beliebige Randdaten y_0, y_1 genau eine Lösung, nämlich die Funktion

$$y(x) = y_0 \cos(\omega x) + \frac{y_1 - y_0 \cos \omega}{\sin \omega} \sin(\omega x).$$

Ist aber

$$\sin \omega = 0, \quad (16)$$

so ist (15) und damit das Gleichungssystem (14) nur lösbar, wenn zufälligerweise $y_1 - y_0 \cos \omega = 0$ ist. In anderen Worten: Für gewisse spezielle Werte des Parameters ω besitzt das Randwertproblem (12)^(13) für die allermeisten Randdaten *keine* Lösung.

Die durch (16) charakterisierten speziellen ω -Werte heißen die **Eigenwerte** dieses Beispiels; es handelt sich um die Zahlen

$$\omega_k := k\pi \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

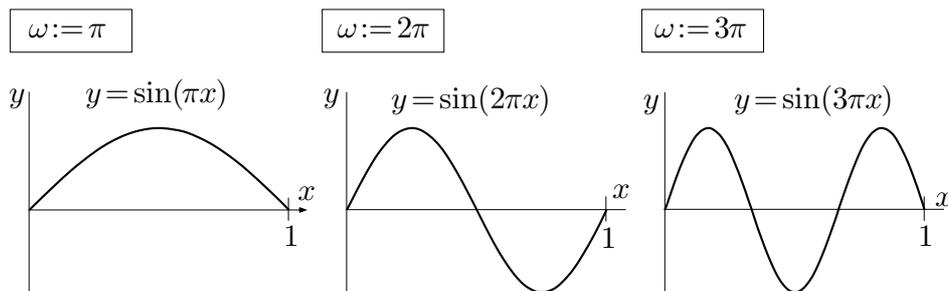


Fig. 4.6.7

“Homogene” Randdaten $y_0 = y_1 = 0$ lassen immer (das heißt: für beliebige Werte des Parameters ω) die triviale Lösung $y(x) \equiv 0$ zu. Ist aber $\omega := \omega_k$ ein Eigenwert, so gibt es auch noch *nichttriviale* Lösungen der homogenen Randwertaufgabe: Man hat dann immer noch $A = y_0 = 0$, aber die Gleichung

(15) lautet jetzt einfach $B \sin \omega_k = 0$ und ist wegen $\sin \omega_k = 0$ für jedes $B \in \mathbb{R}$ erfüllt. In anderen Worten: Die Funktionen

$$y(x) = B \sin(\omega_k x), \quad B \in \mathbb{R},$$

(Fig. 4.6.7) sind nichttriviale Lösungen des homogenen Randwertproblems

$$y'' + \omega_k^2 y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0. \quad (17)$$

Man nennt sie die zum Eigenwert ω_k gehörigen **Eigenfunktionen**.

Wir haben also die folgende Alternative: Ist ω kein Eigenwert, so besitzt das Randwertproblem (12)^(13) für beliebige Randdaten genau eine Lösung. Ist aber $\omega := \omega_k$ ein Eigenwert, so besitzt das inhomogene Randwertproblem (12)^(13) im allgemeinen keine Lösung, dafür besitzt dann das homogene Randwertproblem (17) nichttriviale Lösungen. \circ

Separierbare Differentialgleichungen

Nach diesem Exkurs kehren wir zurück zu den Differentialgleichungen erster Ordnung, $y' = f(x, y)$, und behandeln einen Typ, der sich bei jedermann größter Beliebtheit erfreut: die sogenannten separierbaren Differentialgleichungen. Die rechte Seite $f(\cdot, \cdot)$ hat hier folgende spezielle Form: Sie ist ein Produkt von zwei stetigen Funktionen, die nur von je einer der beiden Variablen abhängen. Eine **separierbare Differentialgleichung** hat demnach die Gestalt

$$y' = g(x) \cdot k(y). \quad (18)$$

Definitionsbereich ist ein Rechteck $R :=]a, b[\times]c, d[$ der (x, y) -Ebene, das sich auch ins Unendliche erstrecken darf.

Nullstellen von $k(\cdot)$ bedürfen besonderer Betrachtung: Ist $k(y_0) = 0$, so ist die konstante Funktion $y(x) := y_0$ eine Lösung von (18). Konstante Lösungen zerlegen das Rechteck R in horizontale Streifen (Fig. 4.6.8). Nach dem Eindeutigkeitssatz (3.16)(b) kann keine nichtkonstante Lösung eine Streifengrenze überqueren. Wir dürfen uns daher im weiteren auf das Innere eines derartigen Streifens beschränken, in anderen Worten: $k(y) \neq 0$ annehmen.

Mit $h(y) := 1/k(y)$ bringen wir (18) auf die für das weitere vorteilhaftere Gestalt

$$h(y) y' = g(x). \quad (18')$$

Es sei nun ein Anfangspunkt (x_0, y_0) vorgegeben (Fig. 4.6.9), und es sei

$$x \mapsto y := y(x)$$

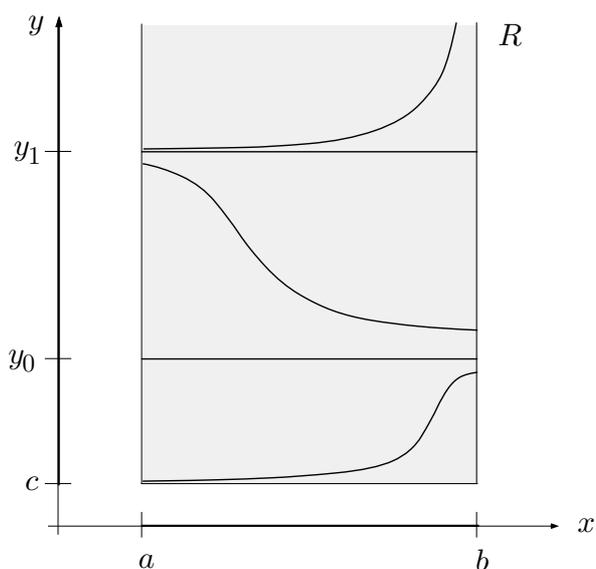


Fig. 4.6.8

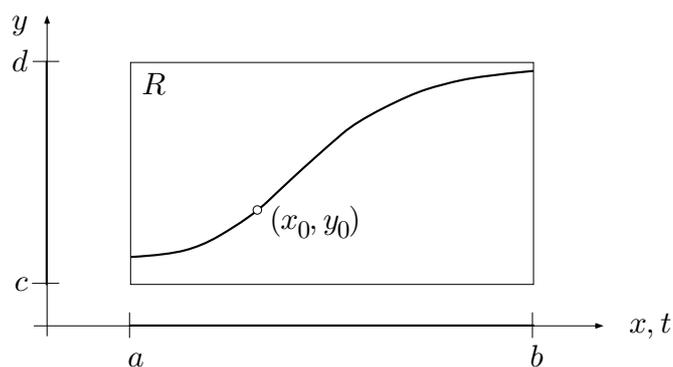


Fig. 4.6.9

die durch (x_0, y_0) gehende Lösung von (18'). Dann gilt für alle $t \in]a, b[$ oder jedenfalls für alle t in der Nähe von x_0 :

$$h(y(t)) y'(t) = g(t)$$

(auf den Namen der unabhängigen Variablen kommt es nicht an). Integrieren wir das nach t von x_0 bis zur frei gewählten oberen Grenze x , so ergibt sich

$$\int_{x_0}^x h(y(t)) y'(t) dt = \int_{x_0}^x g(t) dt .$$

Auf der linken Seite substituieren wir

$$y(t) := y, \quad y'(t) dt := dy .$$

Damit geht die letzte Gleichung über in

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} h(y) dy = \int_{x_0}^x g(t) dt . \quad (19)$$

Die (gegebenen) Funktionen g und h besitzen Stammfunktionen G und H . Mit ihrer Hilfe läßt sich (19) folgendermaßen schreiben:

$$H(y(x)) - H(y_0) = G(x) - G(x_0) . \quad (20)$$

Wegen $h(y) \neq 0$ ist $H(\cdot)$ streng monoton und besitzt damit eine Umkehrfunktion H^{-1} . Rein formal ergibt sich daher aus (20) die folgende Formel für $y(x)$:

$$y(x) = H^{-1}(G(x) - G(x_0) + H(y_0)) .$$

In anderen Worten: Wenn es gelingt, die Gleichung

$$H(y) - H(y_0) = G(x) - G(x_0) \quad (21)$$

nach y aufzulösen, so erhält man die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = g(x) k(y) , \quad y(x_0) = y_0$$

in expliziter Form. Die formelmäßige Auflösung von (20) nach y ist allerdings nicht immer möglich. Man kann dann versuchen, die Gleichung (21) nach x aufzulösen, um wenigstens eine explizite Darstellung der Umkehrfunktion zu erhalten, oder man muß sich mit der impliziten Präsentation (21) der Lösung zufriedengeben.

Die vorangehenden Überlegungen liefern mit der Formelkette (18) \longrightarrow (18') \longrightarrow (19) \longrightarrow (20) bzw. (21) das folgende Rezept für die Behandlung von separierbaren Differentialgleichungen (18):

1. Schreibe die Differentialgleichung in der Form

$$\frac{dy}{dx} = g(x) k(y) .$$

2. Trenne ("separiere") formal die Variablen:

$$\frac{1}{k(y)} dy = g(x) dx .$$

3. Integriere links nach y , rechts nach x , und zwar
 - unbestimmt, falls nach der allgemeinen Lösung gefragt ist. Dabei erscheint eine Integrationskonstante;
 - links von y_0 bis y , rechts von x_0 bis x , falls die durch (x_0, y_0) gehende Lösung verlangt ist.
4. Löse nach y auf, wenn Du kannst.

⑥ Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$$

im Quadrat $Q :=]-1, 1[^2$ der (x, y) -Ebene. Gesucht sind

- (a) die allgemeine Lösung und, unabhängig davon,
 (b) die durch den Punkt $(-1/2, \sqrt{3}/2)$ gehende Lösung.

Separation der Variablen liefert

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (22)$$

Für (a) haben wir das unbestimmt zu integrieren:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

es ergibt sich

$$\arcsin y = \arcsin x + \alpha, \quad (23)$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ die Integrationskonstante bezeichnet. Hieraus erhalten wir nacheinander

$$\begin{aligned} y &= \sin(\arcsin x + \alpha) = x \cos \alpha + \sqrt{1-x^2} \sin \alpha, \\ (y - x \cos \alpha)^2 &= (1-x^2) \sin^2 \alpha, \\ x^2 - 2xy \cos \alpha + y^2 &= \sin^2 \alpha. \end{aligned} \quad (24)$$

Aus der letzten Gleichung geht hervor, daß die Lösungskurven auf Kegelschnitten liegen. Die weitere Analyse würde zeigen, daß es sich dabei um Ellipsen handelt, die dem Quadrat Q einbeschrieben sind (Fig. 4.6.10).

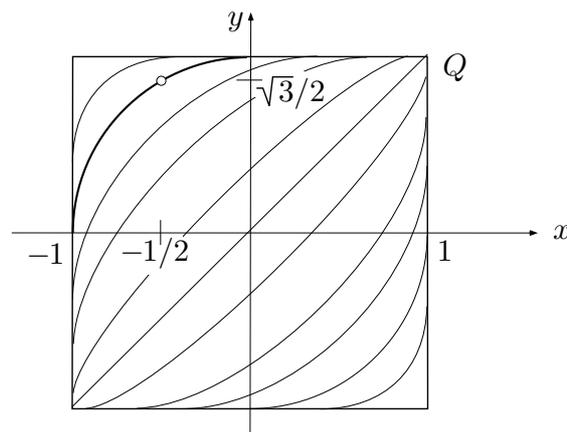


Fig. 4.6.10

Für die Aufgabe (b) haben wir (22) wie folgt bestimmt zu integrieren:

$$\int_{\sqrt{3}/2}^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int_{-1/2}^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Es ergibt sich

$$\arcsin y - \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \arcsin x - \arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)$$

und damit

$$\arcsin y - \arcsin x = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2},$$

also (23) mit $\alpha := \frac{\pi}{2}$. Aus (24) folgt daher: Die Lösung des Anfangswertproblems (b) ist der Kreisbogen

$$y(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (-1 < x < 0).$$

○

Weitere Beispiele

⑦ Die Wachstumsrate einer biologischen Population sei im wesentlichen proportional zur Zahl der vorhandenen Individuen, wobei aber der Proportionalitätsfaktor (im folgenden Wachstumskonstante genannt) mit zunehmender Population abnimmt, da sich die Individuen gegenseitig behindern. Diese Vorstellungen lassen sich wie folgt in ein mathematisches Modell übersetzen:

Wir bezeichnen mit $y(t)$ die Größe der Population zur Zeit t , wobei wir y als kontinuierliche Variable betrachten. Weiter sei $\alpha > 0$ die Wachstumskonstante unter Vernachlässigung der gegenseitigen Behinderung; endlich messe der Parameter $\beta > 0$ den Einfluß der Zusammenstöße zwischen den Individuen auf die Wachstumsrate. Man überlegt sich, daß die Anzahl der (zufälligen) Zweierstöße im Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$ proportional ist zum Quadrat der Anzahl Individuen zur Zeit t , und wird damit auf die folgende Differentialgleichung für die Funktion $y(\cdot)$ geführt:

$$\dot{y} = \alpha y - \beta y^2. \tag{25}$$

Dies ist eine sogenannte t - bzw. x -freie **Differentialgleichung** und ist folglich separierbar. Das Richtungsfeld einer x -freien Differentialgleichung ist invariant bezüglich horizontaler Translation, und dasselbe gilt für die Schar der

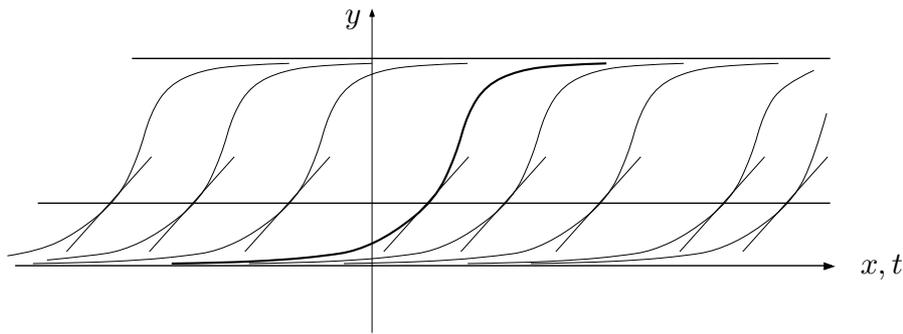


Fig. 4.6.11

Lösungskurven. Mit anderen Worten: Die einzelnen Lösungskurven gehen durch horizontale Parallelverschiebung auseinander hervor (Fig. 4.6.11). Die rechte Seite unserer Differentialgleichung,

$$k(y) := \alpha y - \beta y^2 = -\beta y \left(y - \frac{\alpha}{\beta} \right),$$

besitzt die Nullstellen 0 und α/β , die zu den zwei speziellen Lösungen

$$y(t) \equiv 0, \quad y(t) \equiv \frac{\alpha}{\beta} \quad (26)$$

Anlaß geben. Im weiteren müssen wir die Differentialgleichung auf den y -Intervallen $]0, \alpha/\beta[$ und $] \alpha/\beta, \infty[$ je für sich untersuchen; negative y -Werte brauchen wir wohl nicht zu betrachten. Keine Lösung kann die speziellen Lösungen (26) überkreuzen; insbesondere bleibt jede Lösung für alle Zeiten auf derselben Seite der Linie $y = \alpha/\beta$.

Nach diesen Vorbemerkungen schreiben wir nun (25) in der separierten Form

$$\frac{dy}{-\beta y(y - \alpha/\beta)} = dt.$$

Die durch den Anfangspunkt $(0, y_0)$ gehende Lösung $t \mapsto y(t)$ genügt dann der folgenden Gleichung:

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{-\beta y(y - \alpha/\beta)} = \int_0^t dt = t. \quad (27)$$

Für das Integral linker Hand (= J) stellen wir die Partialbruchzerlegung her. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{\alpha} \int_{y_0}^y \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y - \alpha/\beta} \right) dy = \frac{1}{\alpha} \left(\log y - \log |y - \alpha/\beta| \right) \Big|_{y_0}^y \\ &= \frac{1}{\alpha} \left(\log \frac{y}{y_0} - \log \left| \frac{y - \alpha/\beta}{y_0 - \alpha/\beta} \right| \right). \end{aligned}$$

Aufgrund der letzten Vorbemerkung können wir hier die Betragstriche im weiteren weglassen: Der fragliche Quotient ist jedenfalls positiv. Wir setzen nun den für J erhaltenen Wert in (27) ein und entlogarithmieren. Es folgt

$$\frac{y}{y_0} \Big/ \frac{y - \alpha/\beta}{y_0 - \alpha/\beta} = e^{\alpha t} .$$

Dies läßt sich nach y auflösen; wir erhalten damit als Lösung unseres Anfangswertproblems die Funktion

$$y(t) = \frac{\alpha}{\beta} \frac{y_0}{y_0 - (y_0 - \frac{\alpha}{\beta})e^{-\alpha t}} .$$

Was können wir hieran ablesen?

- Ist $0 < y_0 < \alpha/\beta$, so strebt $y(\cdot)$ mit $t \rightarrow \infty$ monoton wachsend gegen den Grenzwert α/β .
- Ist jedoch $y_0 > \alpha/\beta$, so fällt $y(\cdot)$ monoton gegen denselben Grenzwert.

In anderen Worten: Das durch den Parameter α charakterisierte natürliche Wachstum und die durch β erfaßten gegenseitigen Behinderungen führen zusammen zu der stabilen Populationsgröße α/β , gegen die die Population $y(t)$ mit $t \rightarrow \infty$ in jedem Fall (außer, wenn $y_0 = 0$) konvergiert (Fig. 4.6.12), und zwar nimmt die Abweichung $|y(t) - \alpha/\beta|$ im wesentlichen ab wie $e^{-\alpha t}$. “Stabil” bedeutet hier, daß die Population auch nach einer geringfügigen Störung wieder zur Idealgröße α/β zurückkehrt. Die Lösung $y(t) \equiv 0$ ist hingegen unstabil. \bigcirc

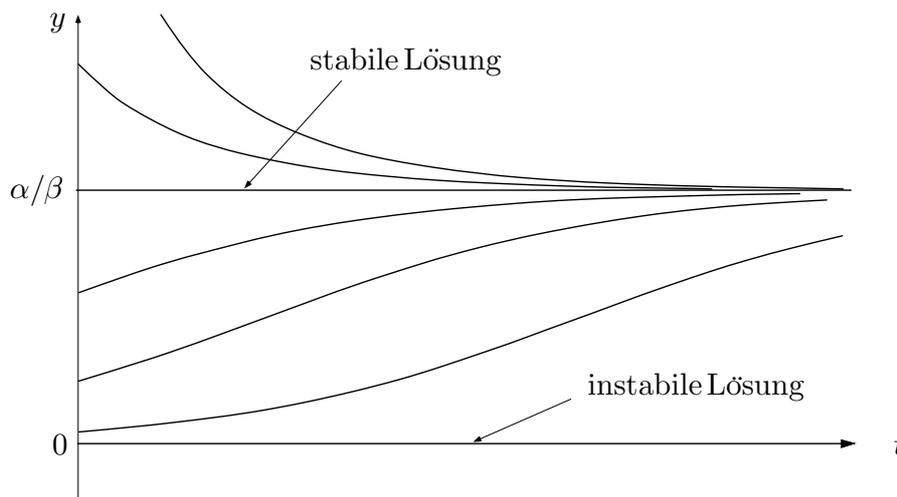


Fig. 4.6.12

Gelegentlich läßt sich eine Differentialgleichung

$$y' = f(x, y) \quad (28)$$

durch geeignete Substitutionen in eine separierbare Differentialgleichung in neuen Variablen überführen. Dies ist insbesondere der Fall bei den sogenannten homogenen Differentialgleichungen (kein Zusammenhang mit *homogenen linearen* Differentialgleichungen). Bei einer **homogenen Differentialgleichung** ist die rechte Seite $f(\cdot, \cdot)$ in einem Sektor

$$\alpha < \arg(x, y) < \beta$$

der (x, y) -Ebene definiert und auf jedem von O ausgehenden Strahl konstant, das heißt: Es gilt

$$\forall (x, y) \in \text{dom}(f), \forall \lambda > 0: \quad f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y). \quad (29)$$

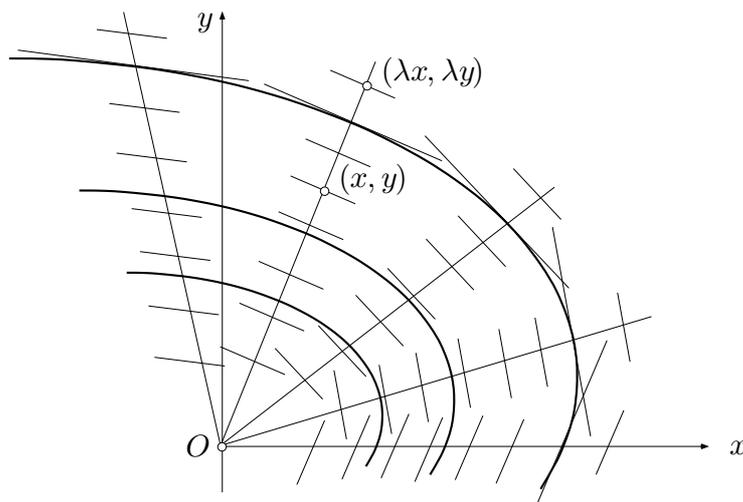


Fig. 4.6.13

Hiernach wird in allen Punkten eines solchen Strahls dieselbe Richtung festgelegt (Fig. 4.6.13), und das Richtungsfeld ist invariant gegenüber Streckung von O aus. Dasselbe gilt dann von der Schar der Lösungskurven; in anderen Worten: Die einzelnen Lösungskurven einer homogenen Differentialgleichung sind zueinander ähnlich und durch Streckung von O aus aufeinander bezogen. Typisches Beispiel ist die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{x}{y} \quad (y > 0).$$

Ihre Lösungen sind konzentrische Kreisbögen um O , siehe das Beispiel 3.5.③.

Für die formale Behandlung einer homogenen Differentialgleichung (28) nehmen wir an, daß $\text{dom}(f)$ ganz in der rechten Halbebene liegt. Wir können dann die neue unbekannte Funktion

$$u(x) := \frac{y(x)}{x}$$

eingeführen. Damit wird

$$y(x) = u(x) \cdot x, \quad \text{d.h.} \quad y = u \cdot x \quad (30)$$

und folglich

$$y' = u' \cdot x + u,$$

so daß wir die Variablen y und y' aus (28) eliminieren können. Zunächst ergibt sich für u die Differentialgleichung

$$u'x + u = f(x, ux). \quad (31)$$

Aufgrund der Homogenitätseigenschaft (29) ist aber

$$f(x, ux) = f(1, u) \quad \forall x > 0.$$

Wir dürfen daher die rechte Seite von (31) durch $f(1, u)$ ersetzen, so daß für $u(\cdot)$ die separierbare Differentialgleichung

$$u' = \frac{f(1, u) - u}{x}$$

resultiert. Wir können diese Differentialgleichung integrieren und erhalten schließlich die Lösungen $y(\cdot)$ der ursprünglichen Gleichung (28) mit Hilfe von (30).

Merke: Das Wesentliche ist, eine gegebene homogene Gleichung als solche zu erkennen. Der Rest ist einfach.

⑧ Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} \quad (x > 0).$$

Setzen wir $y := ux$, so folgt

$$u'x + u = \frac{ux + \sqrt{x^2 + u^2x^2}}{x} = u + \sqrt{1 + u^2} \quad (= f(1, u)!),$$

so daß wir für u die separierbare Differentialgleichung

$$u' x = \sqrt{1 + u^2}$$

erhalten. Wir schreiben $\frac{du}{dx}$ anstelle von u' und separieren; es ergibt sich

$$\frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{dx}{x} .$$

Unbestimmte Integration liefert

$$\log(u + \sqrt{1 + u^2}) = \log x + C .$$

Wir setzen zur Abkürzung $e^C =: p (> 0)$ und erhalten weiter

$$u + \sqrt{1 + u^2} = px .$$

Hieraus folgt nacheinander

$$(px - u)^2 = 1 + u^2 , \quad 2pxu = p^2x^2 - 1$$

und somit wegen $u x = y$:

$$y(x) = \frac{1}{2p}(p^2x^2 - 1) \quad (x > 0) .$$

Die Lösungskurven sind also Parabelbögen (Fig. 4.6.14). Man rechnet nach, daß die betreffenden Parabeln konfokal sind mit gemeinsamem Brennpunkt im Ursprung. Dieser geometrische Sachverhalt belegt, daß die Lösungskurven durch Streckung am Ursprung auseinander hervorgehen, wie oben allgemein ausgeführt. \circ

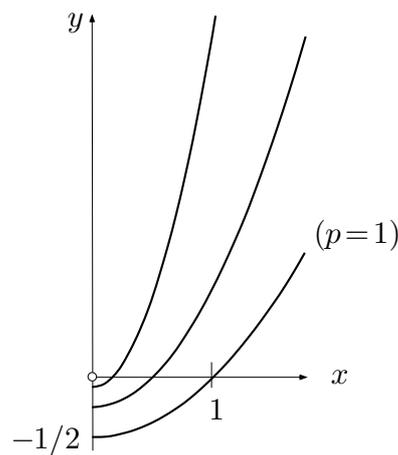


Fig. 4.6.14

⑨ Die Differentialgleichung

$$y' = \frac{x + qy}{qx - y}, \quad q \in \mathbb{R} \text{ fest}, \quad (32)$$

ist an sich homogen und kann nach der angegebenen Methode behandelt werden. Dies führt auf die Differentialgleichung

$$u'x + u = \frac{1 + qu}{q - u}$$

für die neue unbekannte Funktion $u(x) := y(x)/x$.

Um das Umrechnen einer Differentialgleichung auf neue Variablen zu üben, wollen wir hier jedoch anders vorgehen und Polarkoordinaten einführen (was aufgrund der Invarianzeigenschaften einer homogenen Differentialgleichung ohnehin naheliegt). Dabei soll der Polarwinkel ϕ die neue unabhängige Variable darstellen, und die Lösungskurven werden in der Form

$$\gamma: \phi \mapsto (\phi, r(\phi))$$

gesucht; dabei ist $r(\phi)$ die neue unbekannte Funktion.

Wir müssen also in der Differentialgleichung (32) die Variablen x , y und y' durch ϕ , r und \dot{r} ausdrücken, wobei der Punkt die Ableitung nach ϕ bezeichnet. Die Buchstaben x , y und y' dürfen in der resultierenden Gleichung nicht mehr vorkommen!

Natürlich ist

$$x(\phi) = r(\phi) \cos \phi, \quad y(\phi) = r(\phi) \sin \phi$$

und somit $\dot{x} = \dot{r} \cos \phi - r \sin \phi$, ähnlich für \dot{y} . Der Figur 4.6.15 entnimmt man jetzt

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\dot{r} \sin \phi + r \cos \phi}{\dot{r} \cos \phi - r \sin \phi}.$$

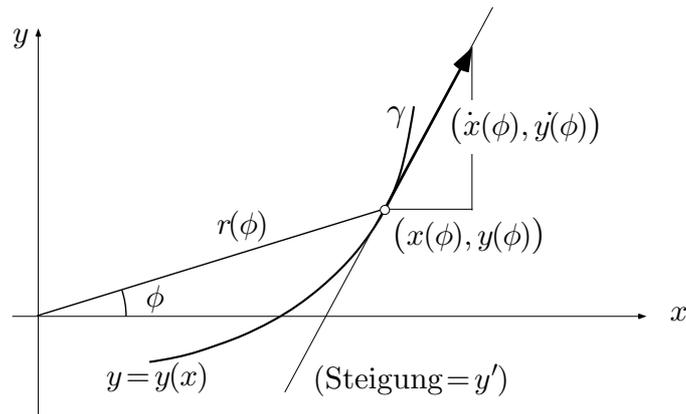


Fig. 4.6.15

Die für x , y und y' erhaltenen Ausdrücke sind nun in die Differentialgleichung (32) einzusetzen. Es ergibt sich

$$\frac{\dot{r} \sin \phi + r \cos \phi}{\dot{r} \cos \phi - r \sin \phi} = \frac{qr \sin \phi + r \cos \phi}{qr \cos \phi - r \sin \phi}$$

und somit nach Vereinfachung

$$\dot{r} = qr .$$

Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung für die unbekannte Funktion $\phi \mapsto r(\phi)$; sie besitzt die Lösungen

$$r(\phi) = C e^{q\phi} .$$

Die gesuchten Lösungskurven sind also logarithmische Spiralen bzw. im Fall $q = 0$ Kreise. ○

Aufgaben

1. (M) Bestimme die durch den Punkt $(0, -1)$ gehende Lösung der Differentialgleichung

$$y' = y \tan x + 4 \sin x .$$

2. Eine gewisse biologische Population würde mit der Zerfallskonstanten $\gamma > 0$ aussterben, wenn nicht infolge zufälliger Zusammenstöße der Individuen auf geheimnisvolle Weise neue Individuen entstünden. Man übersetze diese Vorstellung in eine Differentialgleichung für die Populationsgröße y ; dabei ist noch ein Parameter δ einzuführen, der den Erfolg der Zusammenstöße mißt. Man diskutiere die Lösungen dieser Differentialgleichung für verschiedene Anfangswerte $y(0) =: y_0$. Nach welcher Zeit T kommt es allenfalls zur Katastrophe?
3. Die komplexwertige Funktion $z(\cdot)$ der reellen Variablen t ("Zeit") ist Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{z} = iz^2, \quad z(0) = 1 .$$

- (a) Bestimme $z(\cdot)$.
- (b) (M) Zeichne die Kurve $\gamma: t \mapsto z(t)$ ($-\infty < t < \infty$) in der komplexen Ebene und beschreibe sie in Worten.
4. Ein Punkt bewegt sich auf dem Einheitskreis der (x, y) -Ebene, und zwar so, daß seine Absolutgeschwindigkeit jederzeit gleich seinem momentanen

Abstand von der Geraden $x = 2$ ist. Wie lange braucht er für einen Umlauf? (*Hinweis:* Argumentiere über die Funktion $t \mapsto \phi(t)$.)

5. Präsentiere implizit oder explizit die durch den Ursprung gehende Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \cos(x + y) + \sin(x - y) .$$

(*Hinweis:* Die Differentialgleichung ist separierbar.)

6. Ein Marienkäfer, der pro Sekunde 1 cm zurücklegt, befindet sich zur Zeit $t := 0$ am linken (befestigten) Ende eines Gummiseils von zunächst 1 m Länge und macht sich auf den Weg zum rechten Ende. Gleichzeitig wird aber das Seil von rechts her pro Sekunde um 1 m in die Länge gezogen. Wird der Käfer sein Ziel trotzdem erreichen, und wenn ja: Wie lange braucht er dazu?

7. Die Differentialgleichung

$$\dot{y} = \frac{y^3}{4} - y \quad (=: p(y))$$

ist t -frei. Das zugehörige Richtungsfeld in der (t, y) -Ebene ist somit längs Parallelen zur t -Achse konstant. Trage die vorgeschriebene Richtung in möglichst vielen Punkten der y -Achse ein und skizziere aufgrund der erhaltenen Figur das globale Portrait der Lösungskurven. Gewisse Lösungen gehen mit wachsendem t gegen ∞ . Brauchen sie dafür nur endliche Zeit oder unendlich lang? Die Antwort ist zu begründen. — Die Werte von $p(\cdot)$ können der Fig. 4.6.16 entnommen werden.

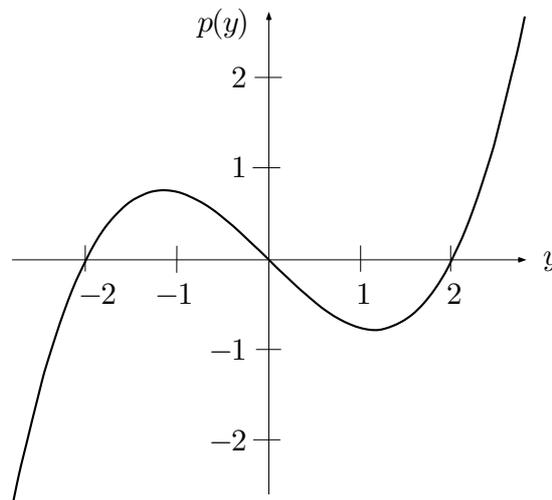


Fig. 4.6.16

8. Eine Kugel wird mit Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben geschossen. Sie unterliegt der konstanten Erdbeschleunigung g sowie dem Luftwiderstand, dessen Bremswirkung proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit angenommen wird (Proportionalitätsfaktor $c > 0$). Nach welcher Zeit erreicht die Kugel ihren Kulminationspunkt? (*Hinweis:* Es genügt, die Funktion $t \mapsto v(t)$ zu analysieren.)
9. Für eine “implizite Differentialgleichung” $F(t, y, y') = 0$ gilt der Existenz- und Eindeigkeitssatz für Anfangswertprobleme nicht ohne weiteres. Zwei Lösungen $y_1(t), y_2(t)$ eines Anfangswertproblems

$$F(t, y, y') = 0, \quad y(t_0) = y_0$$

werden als verschieden betrachtet, wenn sie in jedem noch so kleinen Intervall $]t_0 - h, t_0 + h[$ voneinander verschieden sind. — Wieviele verschiedene Lösungen der Differentialgleichung $(y')^4 - y^2 = 0$ gibt es

(a) für den Anfangspunkt $(1, 0)$, (b) für den Anfangspunkt $(0, 1)$?

10. (Vgl. Aufgabe 2) Eine gewisse biologische Population würde mit $t \rightarrow \infty$ exponentiell aussterben, wenn nicht infolge zufälliger Zusammenstöße von je zwei Individuen auf geheimnisvolle Weise neue Individuen entstünden. “Dreierstöße” führen allerdings zu außerordentlichen Todesfällen. In geeigneten Einheiten wird die Populationsgröße $y(\cdot)$ durch folgende Differentialgleichung modelliert:

$$\dot{y} = -3y + 4y^2 - y^3.$$

Bestimme die stabilen Populationszustände. (*Hinweis:* Die allgemeine Lösung der angegebenen Differentialgleichung ist nicht verlangt.)