### 1.1. Definitionsbereich

Wir brauchen nur zu schauen, für welche $x \in \mathbb{R}$ der Nenner $x^2 + x - \pi$ Null wird. Für diese $x$ ist die Funktion

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x-2|^3 - 2}{x^2 + x - \pi}\right)$$

nicht definiert. Wir lösen also

$$x^2 + x - \pi = 0$$

und erhalten

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\pi}}{2}.$$

Also ist $f$ definiert auf der Menge $\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}$.

### 1.2. Mengen

**(a)** Sei $n \in \mathbb{N}$. Falls $n$ gerade ist, d.h. $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, dann folgt

$$(-1)^n n + \cos(n\pi) = n + 1 = 2k + 1\,.$$

Falls andererseits $n$ ungerade ist, d.h. $n = 2k - 1$ für ein $k \in \mathbb{N}$, dann folgt

$$(-1)^n n + \cos(n\pi) = -n - 1 = -2k\,.$$

Wir schliessen daraus

$$K_1 = \{2k + 1 : k \in \mathbb{N}\} \cup \{-2k : k \in \mathbb{N}\}\,.$$

**(b)** Mit Aufgabe **a)** kann man $K_2$ umschreiben:

$$K_2 = \{\cos((2k + 1)\pi) : k \in \mathbb{N}\} \cup \{\cos((-2k)\pi) : k \in \mathbb{N}\}\,.$$

Daher erhält man sofort

$$K_2 = \{-1\} \cup \{1\} = \{-1, 1\}.$$

**(c)** Sei $n \in \mathbb{N}$. Falls $n$ gerade ist, d.h. $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, dann folgt

$$\frac{4}{\pi^2}\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2} - \frac{2}{\pi}\frac{\cos(n\pi)}{n} = \frac{-2}{n\pi} = \frac{-1}{k\pi}\,.$$

Falls $n$ ungerade und in der Form $n = 4k+1$ mit $k \geq 0$ ist, dann bekommt man

$$\begin{aligned}\frac{4}{\pi^2}\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2} - \frac{2}{\pi}\frac{\cos(n\pi)}{n} &= \frac{4}{\pi^2}\frac{\sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)}{(4k+1)^2} - \frac{2}{\pi}\frac{\cos((4k+1)\pi)}{4k+1} \\ &= \frac{2}{(4k+1)\pi}\left(\frac{2}{(4k+1)\pi} + 1\right)\,.\end{aligned}$$

Falls schliesslich $n$ ungerade und in der Form $n = 4k+3$ mit $k \geq 0$ ist, dann folgt

$$\begin{aligned}\frac{4}{\pi^2}\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2} - \frac{2}{\pi}\frac{\cos(n\pi)}{n} &= \frac{4}{\pi^2}\frac{\sin\left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right)}{(4k+3)^2} - \frac{2}{\pi}\frac{\cos((4k+3)\pi)}{4k+3} \\ &= \frac{2}{(4k+3)\pi}\left(\frac{-2}{(4k+3)\pi} + 1\right)\,.\end{aligned}$$

Wir setzen

$$G := \left\{\frac{-1}{k\pi} : k \geq 1\right\}\,,$$

$$V_1 := \left\{\frac{2}{(4k+1)\pi}\left(\frac{2}{(4k+1)\pi} + 1\right) : k \geq 0\right\}$$

und

$$V_2 := \left\{\frac{2}{(4k+3)\pi}\left(\frac{-2}{(4k+3)\pi} + 1\right) : k \geq 0\right\}.$$

Dann gilt

$$K_3 = G \cup V_1 \cup V_2\,.$$

### 1.3. Funktionen

**(a)** Sei $z \in Z$. Da $g$ surjektiv ist, existiert $y \in Y$ mit $g(y) = z$. Da $f$ surjektiv ist, gibt es ein $x \in X$ sodass $f(x) = y$ gilt. Dann gilt aber $(g \circ f)(x) = g(y) = z$ und da $z \in Z$ beliebig war, ist $g \circ f$ surjektiv.

**(b)** Seien $x_1 \neq x_2 \in X$. Da $f$ injektiv ist, folgt $f(x_1) \neq f(x_2)$. Da $g$ ebenfalls injektiv ist, folgt $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$. Insbesondere gilt $(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$ für alle $x_1 \neq x_2$ in $X$ und somit ist $g \circ f$ injektiv.

**(c)** Sei $z \in Z$. Da $g \circ f$ surjektiv ist, gibt es ein $x \in X$ sodass $(g \circ f)(x) = z$. Insbesondere gilt $g(f(x)) = z$ und folglich ist $f(x) \in Y$ ein Urbild von $z$ unter $g$. Da $z$ beliebig war, ist $g$ surjektiv.

**(d)** Wir beweisen die Behauptung indirekt und zeigen: „Wenn $f$ *nicht* injektiv ist, dann ist auch $g \circ f$ *nicht* injektiv.“ Dies ist formal äquivalent zu der Aussage aus der Aufgabe. Wenn $f$ nicht injektiv ist, dann gibt es $x_1 \neq x_2$ sodass $f(x_1) = f(x_2)$ gilt. Dann gilt aber $(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2)$. Also ist $(g \circ f)$ ebenfalls nicht injektiv.

**(e)** Betrachten Sie folgendes Beispiel: $X = \{A\}$, $Y = \{\alpha, \beta\}$, $Z = \{42\}$ und die Funktionen $f$ und $g$ definiert durch: $f(A) = \alpha$, $g(\alpha) = 42$, $g(\beta) = 42$. $g$ ist offensichtlich nicht injektiv, während $g \circ f$ sehr wohl injektiv ist.

**(f)** Das gleiche Beispiel wie in Aufgabenteil e) funktioniert auch hier.

### 1.4. Manipulation von Summen und Produkten

**(a)** Aufgrund der Endlichkeit der Summe dürfen wir die Terme beliebig neu ordnen und kriegen

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) &= \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_n - a_0.\end{aligned}$$

**(b)** Seien

$$f(n) = \prod_{k=1}^{n} a_k, \quad g(n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}}.$$

Dann gilt

$$g(n) = \frac{\prod_{k=1}^{n} a_k}{\prod_{k=1}^{n} a_{k-1}} = \frac{f(n)}{\prod_{j=0}^{n-1} a_j} = \frac{1}{a_0}\frac{f(n)}{f(n-1)} = \frac{a_n}{a_0}.$$

**(c)** Es gilt

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Unter Verwendung von

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0.$$

folgern wir

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

**(d)** Unter Verwendung von $b$) gilt:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{n+k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{n+k+1}{n+k} = \frac{2n+1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}.$$