2.1. Konvergenz

(a) Nach Definition wissen wir:

- $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ heisst, dass für alle $M > 0$ ein $R > 0$ mit

  $$x > R \Rightarrow f(x) < -M$$

  existiert.

Wegen $\lim_{x\to\infty} g(x) = c$ folgt auch $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{c} = 1$. Nach Definition:

- $\lim_{x\to\infty} g(x) = c$ heisst, dass für alle $\epsilon > 0$ ein $R' > 0$ mit

  $$|\frac{g(x)}{c} - 1| < \epsilon$$

  existiert.

Wir müssen nun zeigen, dass $\lim_{x\to\infty}(f(x)g(x)) = -\infty$, d.h. dass für alle $N > 0$ ein $R'' > 0$ existiert mit $(x > R'' \Rightarrow f(x)g(x) < -N)$. Wir wählen dafür $M = \left\lceil \frac{2}{c} \right\rceil N$ und $\epsilon = \frac{1}{2}$, und finden dafür R, $R' > 0$ mit

$$x > R \Rightarrow f(x) < -M = -\left\lceil \frac{2}{c} \right\rceil N, \text{ und } \quad x > R' \Rightarrow |\frac{g(x)}{c} - 1| < \frac{1}{2}.$$

Die letzte Ungleichung impliziert

$$\frac{g(x)}{c} > \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) > \frac{c}{2}.$$

Wir setzen nun

$$R'' := \max\{R, R'\} > 0.$$

Dann gilt für $x > R''$, dass

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &< f(x)\frac{c}{2} \\ &< -\left\lceil \frac{2}{c} \right\rceil N \frac{c}{2} \\ &< -\frac{2}{c} N \frac{c}{2} \\ &< -N. \end{aligned}$$

In der ersten Ungleichung, haben wir verwendet, dass $f(x) < 0$.

(b) (i) $f(x) = -x^2$ und

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad g(x) := \begin{cases} -\frac{1}{x}, & \text{falls } x \geq 1; \\ -1, & \text{falls } x < 1. \end{cases}$$

(ii) $f(x) = -x^2$ und

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad g(x) := \begin{cases} -\frac{1}{x^2}, & \text{falls } x \geq 1; \\ -1, & \text{falls } x < 1. \end{cases}$$

(ii) $f(x) = -x^2$ und

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad g(x) := \begin{cases} \frac{1}{x^3}, & \text{falls } x \geq 1; \\ 1, & \text{falls } x < 1. \end{cases}$$

2.2. Stetigkeit

Weil der Wert von $\sqrt{\pi} + \frac{x^{\frac{7}{9}}}{\alpha}$ an der Stelle $x = 0$ gleich $\sqrt{\pi}$ ist, muss der Limes $\lim_{x\to 0^-} u(x) = e^k$ gleich $\sqrt{\pi}$ sein. Man erhält daher $k = \log(\sqrt{\pi})$. Ferner gilt $\lim_{x\to 1^-} u(x) = \sqrt{\pi} + \frac{1}{\alpha}$ und $u(1) = \frac{3e}{t} + \sqrt{\pi}$. Deshalb muss man auch die Bedingung $\sqrt{\pi} + \frac{1}{\alpha} = \frac{3e}{t} + \sqrt{\pi}$ stellen. Das bringt

$$\frac{t}{\alpha} = 3e\,, \quad \alpha, t \neq 0\,.$$

Auf $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ist u jeweils eine Komposition stetiger Funktionen und somit stetig. Wir schliessen, dass u auf ganz $\mathbb{R}$ genau dann stetig ist, wenn $k = \log(\sqrt{\pi})$ und $\alpha, t \neq 0$ mit $\frac{t}{\alpha} = 3e$ gilt.

2.3. Komplexe Zahlen I

Sei $z = a + ib$ für $a,\, b \in \mathbb{R}$.

(a) Wir erhalten direkt

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2.$$

(b) Es gilt

$$z + \bar{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a = 2\operatorname{Re}(z).$$

(c) Es ist

$$\bar{\bar{z}} = \overline{a - ib} = a + ib = z.$$

2.4. Komplexe Zahlen II

(a) Es gilt

$$(2+i)(2-i) = 2^2 - i^2 = 4 + 1 = 5.$$

(b) Hier rechnen wir

$$(1+3i)^2 = 1 + 6i + 9i^2 = -8 + 6i.$$

(c) Um den Bruch zu entfernen, müssen wir mit dem komplex konjugierten des Nenners erweitern.

$$\begin{aligned}\frac{1+i}{1-i} &= \frac{1+i}{1-i}\frac{1+i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} \\ &= \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{2i}{2} = i.\end{aligned}$$