3.1. Konvergenz von Folgen

(a) Da $\left|\frac{3+4i}{5}\right| = 1$ erhalten wir

$$|a_{n+1} - a_n| = \left|\left(\frac{3+4i}{5}\right)^n \left(\frac{3+4i}{5} - 1\right)\right| = \left|\frac{3+4i}{5} - 1\right| = \frac{1}{5}\sqrt{20}.$$

Die Folge konvergiert also nicht, da die Differenz aufeinander folgender Folgegleider nicht gegen 0 konvergiert, was für konvergente Folgen der Fall ist

(b) Wir schätzen ab

$$5 = \sqrt[n]{5^n} \leq a_n = \sqrt[n]{3^n + 4^n + 5^n} \leq \sqrt[n]{3 \cdot 5^n} = \sqrt[n]{3} \cdot 5$$

Da $\sqrt[n]{3}$ gegen 1 konvergieren, liegt a_n zwischen zwei Folgen (nämlich der konstanten Folge (5) und $(\sqrt[n]{3} \cdot 5)$), die gegen 5 konvergieren. Damit konvergiert auch a_n gegen 5.

Allgemein gilt: Falls (a_n), (b_n) und (c_n) Folgen sind mit $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = r \in R$ und $b_n \leq a_n \leq c_n$ für alle n, dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = r$.

(c) Wir verwenden, dass $\frac{n^{2019}}{2^n}$ gegen 0 konvergiert, um den Limes zu berechnen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - n^{2019}}{2^n + n^{2019}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{n^{2019}}{2^n}}{1 + \frac{n^{2019}}{2^n}} = 1.$$

3.2. Konvergenzradius

Wir nutzen das Quotientenkriterium:

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2(2(n+1))!}{((n+1)!)^2(2n)!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4.\end{aligned}$$

3.3. Konvergenz von Reihen

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir wissen, dass die Funktionen $x \mapsto nx$ und $x \mapsto 1 + |nx|$ auf $\mathbb{R}$ stetig sind. Also ist auch die Funktion

$$x \mapsto K_n(x) = \frac{nx}{1 + |nx|}$$

stetig, da der Nenner nirgends verschwindet. Für $n \geq 1$ erhält man

$$K_n(x) = \frac{x}{\frac{1}{n} + |x|}\,.$$

Also gilt für $x \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} K_n(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0\,, \\ -1, & \text{falls } x < 0\,. \end{cases}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $K_n(0) = 0$, also

$$\lim_{n\to\infty} K_n(0) = 0\,.$$

Es ist $K(x) := \lim_{n\to\infty} K_n(x)$, also für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. In jedem Punkt $a \neq 0$ ist K stetig, da

$$\lim_{x\to a} K(x) = K(a)\,.$$

Im Nullpunkt ist K aber nicht stetig, da zum Beispiel

$$\lim_{x\to 0^+} K(x) = 1 \neq K(0) = 0\,.$$

Wir haben also hier eine Folge stetiger Funktionen, die gegen eine unstetige Funktion konvergiert.

(b) Sei $x \neq 0$. Von oben wissen wir, dass $\lim_{n\to\infty} K_n(x) = \frac{x}{|x|} \neq 0$ ist, und daher ist die benötigte Bedingung für die Konvergenz nicht erfüllt.

Sei nun $x = 0$. Noch einmal wissen wir von oben, dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $K_n(0) = 0$ gilt. Es folgt $\sum_{n=1}^{\infty} K_n(0) = 0$.

Wir schliessen daraus, dass der Konvergenzbereich nur der Punkt 0 ist.

3.4. Komplexe Funktionen

(a) Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$(-z)^2 - 1 = z^2 - 1,$$

also ist f_1 nicht injektiv.

Dies sind tatsächlich auch alle Punkte, die auf das gleiche Bild abgebildet werden, denn wenn $z = re^{i\varphi}$, $w = se^{i\psi}$, dann ist

$$z^2 = w^2 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 e^{2i\varphi} = s^2 e^{2i\psi}.$$

Dies impliziert dann $r = s$ (da die Radien immer positiv sind) und $\varphi = \psi + k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$. Dies ergibt dann die zwei Möglichkeiten $w = z$ oder $w = -z$, damit sind die Niveaumengen von der Form $\{z, -z\}$.

(b) Wir haben

$$\operatorname{Re}(z + \alpha i) = \operatorname{Re}(z) \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Somit ist f_2 nicht injektiv.

Dies zeigt auch, dass die Niveaulinien vertikale Linien sind, also $\{a + ib \mid b \in \mathbb{R}\}$ für $a \in \mathbb{R}$ fix.

(c) Es gilt

$$|e^{i\varphi} z| = |e^{i\varphi}| \cdot |z| = 1 \cdot |z| = |z| \quad \text{für alle } \varphi \in [0, 2\pi[.$$

Demnach ist auch f_3 nicht injektiv.

Die Niveaulinien sind die konzentrischen Kreise um den Ursprung, also $\{re^{i\varphi} \mid \varphi \in [0, 2\pi)\}$, der Radius r ist fix.