### 4.1. Extrema

**(a)** Der Definitionsbereich von $g$ wird durch die Bedingungen

$$\begin{cases} \arctan x + 1 > 0 \\ \log(\arctan x + 1) \neq 0 \end{cases}$$

bestimmt. Wir bekommen somit

$$\begin{cases} \arctan x > -1 \\ \arctan x + 1 \neq 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x > \tan(-1) = -\tan(1) \\ x \neq 0 \end{cases}$$

und daher ist der Definitionsbereich $(-\tan(1), 0) \cup (0, \infty)$.

**(b)** Für $x > 0$ gilt $g(x) < 0$; für $-\tan(1) < x < 0$ gilt $g(x) > 0$. Ferner ist es nicht schwierig zu sehen, dass

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = -\infty\,, \quad \lim_{x \to 0^-} g(x) = \infty\,,$$

d.h. $x = 0$ ist eine vertikale Asymptote von $g$.

Ausserdem gilt

$$\lim_{x \to (-\tan(1))^+} g(x) = 0^+\,, \quad \lim_{x \to \infty} g(x) = \frac{-1}{\log\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)}\,.$$

Somit sehen wir, dass $y = \frac{-1}{\log\left(1+\frac{\pi}{2}\right)}$ eine horizontale Asymptote ist und dass die Funktion $g$ stetig fortsetzbar ist an der Stelle $x = -\tan(1)$.

Mit der Kettenregel erhalten wir

$$g'(x) = \frac{1}{\log^2(\arctan x + 1)} \cdot \frac{1}{\arctan x + 1} \cdot \frac{1}{x^2 + 1}\,,$$

was positiv ist genau dann, wenn $\arctan x + 1 > 0$ ist. Wir schliessen, dass für alle $x$ in dem Definitionsbereich $g'(x) > 0$ ist. Daher ist $g$ streng monoton wachsend auf $(-\tan(1), 0)$ und $(0, \infty)$.

Von oben wissen wir, dass $g$ unbeschränkt ist und somit keine Extrema besitzt.

Zuletzt gibt es keine kritischen Punkte.

### 4.2. L'Hôpital

ETH zürich

## 4.2. L'Hôpital

a) Da Zähler und Nenner gegen 0 gehen, dürfen wir L'Hôpital anwenden:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2x} = \underline{\underline{\infty}}$$

b) Da Zähler und Nenner gegen 0 gehen, dürfen wir L'Hôpital anwenden:

$$\lim_{x\to \pi} \frac{\sin(5x)}{\sin(3x)} = \lim_{x\to\pi} \frac{5\cos(5x)}{3\cos(3x)} = \frac{5}{3}\frac{\cos(5\pi)}{\cos(3\pi)}$$

$$= \frac{5}{3}\frac{(-1)}{(-1)} = \underline{\underline{\frac{5}{3}}}$$

c) Da Zähler und Nenner gegen $\infty$ gehen, dürfen wir L'Hôpital anwenden. Wir berechnen zuerst:

$$(x^x)' = (e^{x\log x})' = e^{x\log x}\left(\log x + x\cdot\frac{1}{x}\right)$$

$$= x^x(\log x + 1)$$

Dann ist:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^x}{x\log x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^x(\log x+1)}{\log x+1} = \lim_{x\to\infty} x^x = \underline{\underline{\infty}}$$

d) Da Zähler und Nenner gegen $\infty$ gehen, dürfen wir L'Hôpital anwenden:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log\log x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\log x}\cdot\frac{1}{x}}{e^x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x\log x\cdot e^x} = \underline{\underline{0}}$$

### 4.3. Stetigkeit einer Potenzreihe (explizit)

Sei $\varepsilon > 0$. Wir werden $\delta$ im Laufe des Beweises wählen, sei zunächst einfach $|t - 0| = |t| < \delta$. Dann ist

$$\begin{aligned} |s(t) - s(0)| &= \Big|1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{(k+1)!} - 1\Big| = \Big|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{(k+1)!}\Big| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |t|^k \leq \frac{|t|}{1-|t|} \leq \frac{\delta}{1-\delta} \end{aligned}$$

wobei wir die Abschätzung $\frac{1}{(k+1)!} \leq 1$ verwendet haben und danach die Formel für die geometrische Reihe. Man sieht nun schnell, dass der letzte Bruch $< \varepsilon$ ist, falls wir $\delta = \min\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\}$ wählen.

### 4.4. Taylorreihe

Es gilt $f(\frac{1}{4}) = \sqrt[16]{e}$. Betrachte die Funktion $f(x) = e^{x^2}$. Die $n$-te Taylor-Entwicklung von $f$ um den Punkt $a = 0$ lautet:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x).$$

Dabei ist das Restglied im Punkt $x = \frac{1}{4}$ gleich

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

für ein $\tau \in (0, 1/4)$. Wir müssen $n$ so wählen, dass gilt $|R_n(1/4)| < 5 \cdot 10^{-3}$.

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl} f(x) &=& e^{x^2} & f(0) &=& 1 \\ f'(x) &=& 2xe^{x^2} & f'(0) &=& 0 \\ f''(x) &=& (4x^2+2)e^{x^2} & f''(0) &=& 2 \\ f'''(x) &=& (8x^3+12x)e^{x^2} & f'''(0) &=& 0 \\ f^{(4)}(x) &=& (16x^4+48x^2+12)e^{x^2} & f^{(4)}(0) &=& 12 \end{array}$$

Mit der Abschätzung $e^{1/16} \leq \sqrt[16]{4} = \sqrt[8]{2} \leq \sqrt{2} \leq 3/2$ folgt

$$|R_3(1/4)| \leq \frac{(16/4^4 + 48/4^2 + 12) \cdot (3/2)}{4!} (1/4)^4 \leq \frac{1}{4^4} \leq 5 \cdot 10^{-3}.$$

Für $n = 3$ lautet das Taylorpolynom

$$f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{6} \cdot x^3 = 1 + x^2.$$

Dessen Wert an der Stelle $x = 1/4$ liefert die gesuchte Näherung

$$1 + \frac{1}{4^2} = 1.0625$$

(Der wahre Wert ist $f(1/4) = 1.0644944\ldots$)