5.1. Differentialgleichungen

(a) Das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^2 + 7\lambda - 15$$

mit den beiden verschiedenen Nullstellen $-\frac{1}{2}\left(7+\sqrt{109}\right)$ und $-\frac{1}{2}\left(7-\sqrt{109}\right)$. Die allgemeine Lösung ist deshalb $y(x) = c_1 e^{-\frac{1}{2}\left(7+\sqrt{109}\right)x} + c_2 e^{-\frac{1}{2}\left(7-\sqrt{109}\right)x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(b) Das charakteristische Polynom

$$\lambda^4 - 1$$

hat die Nullstellen $1, -1, i, -i$. Somit ist die allgemeine Lösung $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos(x) + c_4 \sin(x)$, $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.

(c) Das charakteristische Polynom

$$\lambda^4 + 4\lambda^2 + 4$$

hat die doppelten Nullstellen $i\sqrt{2}$, sowie $-i\sqrt{2}$. Somit ist die allgemeine Lösung $y(x) = (c_1 + c_2 x)\cos(\sqrt{2}\,x) + (c_3 + c_4 x)\sin(\sqrt{2}\,x)$, $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.

(d) Das charakteristische Polynom

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + 5\lambda^2$$

hat die Nullstellen 0 (doppelt), sowie $1+2i$ und $1-2i$. Somit ist die allgemeine Lösung $y(x) = c_1 + c_2 x + \Big\{ c_3 \cos(2x) + c_4 \sin(2x) \Big\} e^x$, $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.

5.2. Anfangswertproblem

Die allgemeine Lösung ist in Teilaufgabe 1a) gegeben. Leiten wir dort ab und setzen $x = 0$ ein, erhalten wir die Gleichung

$$c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 = 1,$$

wobei $\lambda_1 = -\frac{1}{2}\left(7+\sqrt{109}\right)$ und $\lambda_2 = -\frac{1}{2}\left(7-\sqrt{109}\right)$. Eine Lösung hat also die Form

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + \frac{1 - c_1\lambda_1}{\lambda_2} e^{\lambda_2 x}.$$

5.3. Hermitesche Differentialgleichung

Wir zeigen zunächst durch Induktion nach $n \geq 0$, dass

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2} = F_n(x)e^{-x^2} \tag{1}$$

mit einem Polynom F_n vom Grad n. Der Induktionsanfang $n = 0$ ist trivial.

`Induktionschritt` $n \to n+1$. Wir setzen zur Abkürzung $D = \frac{d}{dx}$.

$$\begin{aligned} D^{n+1}e^{-x^2} &= D(D^n e^{-x^2}) = D(F_n(x)e^{-x^2}) \\ &= F_n'(x)e^{-x^2} - F_n(x)2xe^{-x^2} \\ &= (-2xF_n(x) + F_n'(x))e^{-x^2} =: F_{n+1}(x)e^{-x^2}, \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Aus (1) folgt nun, dass

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} D^n e^{-x^2} = (-1)^n F_n(x)$$

ein Polynom n-ten Grades ist.

Wir zeigen jetzt, dass H_n die Hermitesche Differentialgleichung löst. Es genügt offenbar, die Gleichung

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

für die Funktion $y = e^{x^2} D^n e^{-x^2}$ nachzuweisen. Es gilt $e^{-x^2} y = D^n e^{-x^2}$. Nun ist

$$\begin{aligned} D^2(e^{-x^2}y) &= D^{n+2}e^{-x^2} = D^{n+1}(De^{-x^2}) \\ &= D^{n+1}(-2xe^{-x^2}) \\ &\overset{(*)}{=} -2xD^{n+1}e^{-x^2} - 2(n+1)D^n e^{-x^2} \\ &= -2xD(e^{-x^2}y) - 2(n+1)e^{-x^2}y \\ &= e^{-x^2}(4x^2y - 2xy' - 2(n+1)y), \end{aligned}$$

wobei an der Stelle $\overset{(*)}{=}$ die Rechenregel

$$D^{n+1}(xf(x)) = xD^{n+1}f(x) + (n+1)D^n f(x),$$

benutzt wurde. Andererseits gilt

$$\begin{aligned} D^2(e^{-x^2}y) &= e^{-x^2}y'' + 2(De^{-x^2})y' + (D^2e^{-x^2})y \\ &= e^{-x^2}(y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y). \end{aligned}$$

Durch Vergleich erhält man

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0\,.$$

5.4. Linearer Operator

Da $1 \mapsto 0$, $x \mapsto 1$ und $x^2 \mapsto 2x$ ist die Abbildungsmatrix gegeben durch

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$