### 6.1. System von Differentialgleichungen

Lösung siehe nächste Seite

### 6.2. Riemannintegrierbarkeit

**(a)** Für eine monoton steigende Funktion $f$ gilt

$$\sup_{x \in I_k} f(x) = f(x_k) \text{ und } \inf_{x \in I_k} f(x) = f(x_{k-1}).$$

Also gilt

$$S_+(f, \mathcal{Z}) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1})$$

und

$$S_-(f, \mathcal{Z}) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}).$$

**(b)** Es gilt

$$\begin{aligned}
0 \leq S_+(f, \mathcal{Z}) - S_-(f, \mathcal{Z}) &= \sum_{j=0}^{n-1} \left( \sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f \right) (x_{j+1} - x_j) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \left( f(x_{j+1}) - f(x_j) \right) (x_{j+1} - x_j) \\
&\leq \left( \sum_{j=0}^{n-1} \left( f(x_{j+1}) - f(x_j) \right) \right) \delta(\mathcal{Z}) \\
&= (f(b) - f(a))\delta(\mathcal{Z}).
\end{aligned}$$

**(c)** Mit der Definition von sup und inf gilt für jede fixe Zerlegung $\mathcal{Z}$:

$$\begin{aligned}
S_+(f) - S_-(f) &\leq S_+(f, \mathcal{Z}) - S_-(f, \mathcal{Z}) \\
&\leq (f(b) - f(a))\delta(\mathcal{Z}).
\end{aligned}$$

Da dies für alle $\mathcal{Z}$ gilt und insbesondere für eine Folge mit $\delta(\mathcal{Z}) \to 0$, sehen wir, dass

$$S_+(f) - S_-(f) \leq 0.$$

Da andererseits aber auch $S_+(f) \geq S_-(f)$ folgt Gleichheit und somit ist $f$ Riemann-integrierbar.

ETH zürich

## Schnellübung 6.1: System von Differentialgleichungen

a) Mit $x_0 = y$, $x_1 = x_0'$ ($= y'$) haben wir
$x_1'$ ($= y'' = y' + 6y$) $= x_1 + 6x_0$, also

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + 6x_0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_0(0) \\ x_1(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

b) Wir überprüfen, ob $z_1 = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $z_2 = e^{-2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Lösungen sind:

$$z_1' = 3e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$Az_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = e^{3t}\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} = z_1' \quad ✓$$

$$z_2' = -2e^{-2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Az_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} e^{-2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{-2t}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = z_2' \quad ✓$$

Wegen Linearität ist dann auch jede Linearkombination eine Lösung. Ausserdem haben wir einen zweidimensionalen Lösungsraum, also kann es keine weiteren geben.

c)

$$C_1 e^{3\cdot 0}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2\cdot 0}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow \underline{C_1 = C_2 = 1}$$

d)

$$1 \cdot e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot e^{-2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

### 6.3. Ableiten von Integralen bzgl der oberen Grenze

**(a)** Mit den Funktionen

$$\begin{aligned} g(s) &:= \int_0^s \cos^3(t)\,dt \quad \text{und} \\ h(x) &:= x^3 \end{aligned}$$

gilt $f(x) = g\,(h(x))$. Nach dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung ist $g\,(s)$ differenzierbar mit $g'\,(s) = \cos^3(s)$. Aus der Kettenregel folgt daher

$$f'\,(x) = g'\,(h\,(x)) \cdot h'\,(x) = \cos^3\left(x^3\right) \cdot 3x^2.$$

**(b)** Nach dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung ist $f\,(x)$ differenzierbar mit Ableitung $f'\,(x) = \cos\left(\cos(x)\right)$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $|\cos(x)| \leq 1 < \frac{\pi}{2}$ und daher ist $\cos\left(\cos(x)\right) > 0$. Also ist $f\,(x)$ stetig und streng monoton wachsend und deshalb eine bijektive Funtion von $\mathbb{R}$ nach image$(f) \subset \mathbb{R}$. Es gilt $f\,(\pi) = 0$ und daher ist $\pi = f^{-1}\,(0)$. Die Formel für die Ableitung einer Umkehrfunktion liefert also:

$$\left(f^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(0)\right)} = \frac{1}{f'\,(\pi)} = \frac{1}{\cos\left(\cos(\pi)\right)} = \frac{1}{\cos\,(-1)} = \frac{1}{\cos(1)}\,.$$

### 6.4. Bestimmte Integrale

**(a)** Substitution $u := \log x$, $du = \frac{1}{x}dx$;
Integrationsgrenzen $x = e \mapsto u = \log(e) = 1$, $x = e^2 \mapsto u = \log(e^2) = 2$: Also gilt

$$\int_e^{e^2} \frac{\log^2 x}{x}\,dx = \int_1^2 u^2\,du = \frac{1}{3}\,u^3\Big|_{u=1}^2 = \frac{1}{3}\,(8-1) \;=\; \frac{7}{3}\,.$$

Bem.: Man kann auch direkt benutzen, dass der Integrand die Form $f(x)^2 \cdot f'(x) = \frac{1}{3}(f(x)^3)'$ hat und daher die Funktion $\frac{1}{3}\log(x)^3$ eine Stammfunktion ist.

**(b)** Wir nutzen aus, dass der Integrand ungerade ist, während das Gebiet symmetrisch ist:

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

Wenden wir jetzt auf den zweiten Term die Subsitution $y = -x$ an erhalten wir

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx - \int_{-1}^0 \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\,dy = 0.$$

Alternative: Mit der Substitution $u := 1 + x^2$, $du = 2x\ dx$:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ dx \int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ dx + \int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ dx$$
$$= \int_{2}^{1} \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{u}}\ du + \int_{1}^{2} \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{u}}\ du = \ldots = 0.$$

**(c)**

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \sin(3x - \pi/4)\ dx &= -\frac{1}{3}\ \cos(3x-\pi/4)\Big|_{x=0}^{\pi/2} \\
&= -\frac{1}{3}\ \cos\frac{5\pi}{4} + \frac{1}{3}\ \cos\frac{\pi}{4} \\
&= 2\frac{1}{3}\cos(\pi/4) = \frac{1}{3}\sqrt{2}\,.
\end{aligned}$$

**(d)** Wir integrieren partiell, bis wir statt eines Polynoms nur noch einen konstanten Faktor im Integral haben.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \overset{\downarrow}{t^2} \cdot \overset{\uparrow}{\cosh}(2t)\ \ dt &= \left[\frac{1}{2}\sinh(2t)t^2\right]_0^1 - \int_0^1 \sinh(2t)t\ dt \\
&= \frac{1}{2}\sinh(2) - \Big(\frac{1}{2}\left[\cosh(2t)t\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \cosh(2t)dt\Big) \\
&= \frac{1}{2}\sinh(2) - \Big(\frac{1}{2}\cosh(2) - \left[\frac{1}{4}\sinh(2t)\right]_0^1\Big) \\
&= \frac{1}{2}\sinh(2) - \frac{1}{2}\cosh(2) + \frac{1}{4}\sinh(2) = \frac{1}{4}(3\sinh(2) - 2\cosh(2)) \\
&= \frac{1}{4}(\frac{3}{2}(e^2 - e^{-2}) - e^2 - e^{-2}) = \frac{1}{8}(e^2 - 5e^{-2}).
\end{aligned}$$