7.1. Uneigentliche Integrale I

(a) Das Integral

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{\xi \to \infty} \int_2^\xi \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{\xi \to \infty} [\ln(\ln x)]_{x=2}^{x=\xi} = \lim_{\xi \to \infty} (\ln(\ln \xi) - \ln(\ln 2))$$

konvergiert nicht, denn

$$\lim_{\xi \to \infty} (\ln(\ln \xi)) = \infty.$$

(b) Die Substitution $u = \ln x$ ergibt $du = \frac{dx}{x}$, also

$$\begin{aligned}\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2} &= \lim_{\xi \to \infty} \int_2^\xi \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{\xi \to \infty} \int_{\ln 2}^{\ln \xi} \frac{du}{u^2} = \lim_{\xi \to \infty} \left[-\frac{1}{u}\right]_{u=\ln 2}^{u=\ln \xi} \\ &= \lim_{\xi \to \infty} \left[-\frac{1}{\ln \xi} + \frac{1}{\ln 2}\right] = \frac{1}{\ln 2}.\end{aligned}$$

Der im Vergleich zu Teil a) im Nenner hinzugekommene Faktor $\ln x$ bewirkt also eine Konvergenz des Integrales.

(c) Wir substituieren $u = x^2$, so dass $du = 2xdx$ und

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}} &= \lim_{\xi \to \infty} \int_0^\xi \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}} = \lim_{\xi \to \infty} \int_0^{\xi^2} \frac{du}{2\sqrt{1+u^2}} \\ &= \lim_{\xi \to \infty} \left[\frac{1}{2}\text{ArSinh } u\right]_{u=0}^{u=\xi^2} = \frac{1}{2} \lim_{\xi \to \infty} \text{ArSinh } \xi^2 = \infty.\end{aligned}$$

Dieses Integral divergiert also ebenfalls.

7.2. Uneigentliche Integrale II

(a) Die Funktion $x \mapsto \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ist auf $\mathbb{R}$ definiert, stetig und positiv. Wegen $\cosh(-x) = \cosh x$ gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\cosh x} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{\cosh x} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\cosh x} = 2 \cdot \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\cosh x}$$

falls letzeres Integral konvergiert. Für $x > 0$ gilt

$$e^x + e^{-x} \geq e^x \geq \frac{x^2}{2}.$$

Daher gilt

$$\frac{1}{\cosh x} \leq \frac{4}{x^2}$$

für alle hinreichend grossen x. Mit Satz 4.11 haben wir also Konvergenz.

(b) Die Funktion $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-x^3}}$ ist auf $]0,1[$ definiert und stetig. Es gibt Probleme an den Stellen 0 und 1. Wir teilen das Intervall deshalb auf in $[0, \frac{1}{2}]$ und $[\frac{1}{2}, 1]$.

An der Stelle 0: Es gilt $\sqrt{x-x^3} = \sqrt{x(1-x^2)} = \sqrt{x(1+x)(1-x)}$, und darum

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x-x^3}}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{x(1-x^2)}}\right| \leq \left|\frac{1}{\sqrt{x\left(1-\frac{1}{4}\right)}}\right| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

für jedes $x \in]0, \frac{1}{2}]$. Also konvergiert das Integral $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x-x^3}}\, dx$ dank Satz 4.12.

An der Stelle 1: Es gilt $\sqrt{x-x^3} = \sqrt{x(1-x^2)} = \sqrt{x(1+x)(1-x)}$, und darum

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x-x^3}}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{x(1+x)(1-x)}}\right| \leq \left|\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)(1-x)}}\right| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

für jedes $x \in [\frac{1}{2}, 1[$. Also konvergiert das Integral $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{x-x^3}}\, dx$. (Denn es gilt: $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{y}\, dy$.)

7.3. Picard-Iteration

(a) Da $z(0) = -1$ erfüllt $y(t) = z(t) + 1$ sicher $y(0) = 0$. y erfüllt die Gleichung:

$$y'(t) = z'(t) = -z(t) = -y(t) + 1 =: f(y,t).$$

Zudem können wir jederzeit aus gegebenem y das ursprüngliche z wieder herleiten, also sind die Probleme äquivalent. Wir beschäftigen uns im Folgenden also nur noch mit

$$y'(t) = -y(t) + 1, \quad y(0) = 0.$$

ETH zürich

SU 7.3: Picard-Iteration (Teilaufgaben b), c), d))

Für ein Problem der Form

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ist die Picarditeration gegeben durch

$$y^{[k]}(t) = \int_0^t f(s, y^{[k-1]}(s))\, ds$$

für einen gegebenen Anfangswert (-funktion) $y^{[0]}(t)$.

b) $y^{[0]}(t) = -e^{-t} + 1$

$f(t,y) = -y + 1$

$$y^{[1]}(t) = \int_0^t \left(-\left(e^{-s}+1\right)+1\right) ds = \int_0^t e^{-s}\, ds = -e^{-s}\Big|_0^t$$

$$= -e^{-t} + 1$$

Da $y^{[0]} = y^{[1]}$ sehen wir sofort, dass $y^{[k]} = y^{[0]}$ für alle k, dass also $\underline{y^{[0]}(t) = -e^{-t}+1}$ die Lösung des Problems ist.

c) $y^{[0]}(t) \equiv 0$

$$y^{[1]}(t) = \int_0^t (-0+1)\, ds = t$$

$$y^{[2]}(t) = \int_0^t (-s+1)\, ds = -\frac{1}{2}t^2 + t$$

$$y^{[3]}(t) = \int_0^t \left(+\frac{1}{2}s^2 - s + 1\right) ds = \frac{1}{3!}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t$$

Wenn wir dies betrachten (ev. noch ein paar Schritte mehr ausführen!) kommen wir zu folgender Behauptung:

$$y^{[k]}(t) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i+1}}{i!} t^i$$

Beweis per Induktion. Die Verankerung ist oben.

$k \to k+1$

$$y^{[k+1]}(t) = \int_0^t \left(- \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i+1}}{i!} s^i + 1 \right) ds$$
$$= -\sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i+1}}{i!} \frac{t^{i+1}}{i+1} + t$$
$$= \sum_{i=1}^{k+1} \frac{(-1)^{i+1}}{i!} t^i$$

d) $y^{[0]}(t) = -e^{2t} + 1$

$$y^{[1]}(t) = \int_0^t \left(e^{2s} - 1 + 1 \right) ds$$
$$= \frac{1}{2} e^{2s} \Big|_0^t = \frac{1}{2} e^{2t} - \frac{1}{2}$$

$$y^{[2]}(t) = \int_0^t \left(-\frac{1}{2} e^{2s} + \frac{1}{2} + 1 \right) ds$$
$$= -\frac{1}{4} e^{2s} + \frac{3}{2} s \Big|_0^t = -\frac{1}{4} e^{2t} + \frac{1}{4} + \frac{3}{2} t$$

$$y^{[3]}(t) = \int_0^t \left(-\left(-\frac{1}{4} e^{2s} + \frac{1}{4} + \frac{3}{2} s \right) + 1 \right) ds$$
$$= \frac{1}{8} e^{2s} + \frac{3}{4} s - \frac{3}{4} s^2 \Big|_0^t = \frac{1}{8} e^{2t} - \frac{1}{8} + \frac{3}{4} t - \frac{3}{4} t^2$$

$$y^{[4]}(t) = -\frac{1}{16} e^{2t} + \frac{1}{16} - \frac{3}{8} t^2 + \frac{3}{12} t^3 + \frac{9}{8} t$$

Die Struktur ist hier weniger offensichtlich, aber nach einigen Schritten können wir auch hier raten:

$$y^{[k]}(t) = \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} e^{2t} + \frac{(-1)^k}{2^k} + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} \left(1 + \frac{(-1)^{k-i+1}}{2^{k-i}} \right) t^i$$

Beweis per Induktion: für $k \to k+1$:

$$y^{[k+1]} = \int \left(-\frac{(-1)^{k+1}}{2^k} e^{2s} - \frac{(-1)^k}{2^k} + 1 - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} \left(1 + \frac{(-1)^{k-i+1}}{2^{k-i}} \right) s^i \right) ds$$
$$= -\frac{(-1)^{k+1}}{2^k} \left(\frac{1}{2} e^{2s} - 1 \right) + \left(1 - \frac{(-1)^k}{2^k} \right) t$$
$$- \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} \left(1 + \frac{(-1)^{k-i+1}}{2^{k-i}} \right) \frac{t^{i+1}}{i+1} \quad ,$$

ETH zürich

was nach einfachen Umformungen der Behauptung entspricht.

Beachte nun, dass für $k \to \infty$ gilt:

$$\frac{(-1)^{k+1}}{2^k} \to 0$$

$$\left(1 + \frac{(-1)^{k-i+1}}{2^{k-i}}\right) \to 1 \quad \text{für jedes \underline{fixe} } i.$$

Damit konvergiert also auch $y^{(k)}(t)$ für $k \to \infty$ gegen die Lösung $-e^{-t}+1$