1.1. Summe

Mithilfe des Assoziativgesetzes kann man die Summe $\sum_{n=0}^{49}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ als

$$\sum_{n=0}^{49}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{18}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\sum_{n=19}^{49}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

schreiben. Daher erhält man sofort

$$\sum_{n=19}^{49}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{49}\left(\frac{2}{3}\right)^n-\sum_{n=0}^{18}\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Mithilfe der Formel für die geometrische Reihe bekommt man

$$\sum_{n=0}^{49}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{49+1}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{50}}{1-\frac{2}{3}}$$

und

$$\sum_{n=0}^{18}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{18+1}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{19}}{1-\frac{2}{3}}.$$

Wir schliessen

$$\begin{aligned}\sum_{n=19}^{49}\left(\frac{2}{3}\right)^n &= \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{50}-1+\left(\frac{2}{3}\right)^{19}}{1-\frac{2}{3}}\\ &= 3\left(\frac{2}{3}\right)^{19}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{31}\right).\end{aligned}$$

1.2. Spielkarten

Wenn wir die Implikation

„Karte hat schraffierte Rückseite $\quad\Rightarrow\quad$ Karte ist ein Ass“ (1)

überprüfern wollen, müssen wir zunächst alle Karten mit schraffierter Rückseite überprüfen. Also müssen wir sicher die zweite Karte von links umdrehen. Nun müssen wir natürlich noch prüfen, ob keine andere Karte auch eine schraffierte Rückseite hat. Denn die äquivalente Aussage von (1) ist

„Karte ist kein Ass $\quad\Rightarrow\quad$ Karte hat nicht schraffierte Rückseite“. (2)

Da es keine Rolle spielt, welche Rückseiten die Karten Eins und Drei haben, müssen wir diese nicht umdrehen. Jedoch müssen wir verifizieren, dass die letzte Karte, welche kein Ass ist, nicht eine schraffierte Rückseite hat. Also drehen wir sie um. Da es für unsere Aussage keine Rolle spielt, welche Vorderseite die Karte mit der gepunkteten Rückseite hat, müssen wir sie nicht umdrehen. Also haben wir zwei der Karten umgedreht.

1.3. Mengen

Um die Gleichheit

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\,,$$

zu beweisen, zeigen wir die Äquivalenz

$$x \in \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\,.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c \quad &\Leftrightarrow \quad \exists i_0 \in \{1, \cdots, n\}\ : x \in A_{i_0}^c \\ &\Leftrightarrow \quad \exists i_0 \in \{1, \cdots, n\}\ : x \notin A_{i_0} \\ &\Leftrightarrow \quad x \notin \bigcap_{i=1}^{n} A_i \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c\,, \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

1.4. Binomischer Lehrsatz

(siehe nächste zwei Seiten.)

ETH zürich

Aufgabe 1.4: bin. Lehrsatz

a) zz: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$

Fallunterscheidung:

k = 0: $\underbrace{\binom{n}{0}}_{= \frac{n!}{n!\,0!} = \frac{n!}{n!} = 1} + \underbrace{\binom{n}{-1}}_{=0 \text{ nach Def.}} \overset{?}{=} \underbrace{\binom{n+1}{0}}_{=1}$

$1 + 0 = 1$ ✓

k > 0: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \overset{\text{nach Def. und weil } k>0}{=} \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!}$

$\overset{\text{Hauptnenner}}{=} \frac{n!(n-k+1) + n!\,k}{k!\,(n+1-k)!}$

$= \frac{n!(n+1)}{k!\,(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$

b) z.z: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

Induktionsverankerung: $n = 0$

linke Seite: $(x+y)^0 = 1$

rechte Seite: $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^k y^{0-k} = \binom{0}{0} x^0 y^0 = 1$ = ✓

Induktionsannahme: Wir nehmen an, die Aussage gelte für n, d.h.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \qquad \text{(IA)}$$

Induktionsschritt: Wir wollen die Aussage nun für n+1 zeigen. Wir beginnen auf der linken Seite:

ETH zürich

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n (x+y)$$

$$\overset{(IA)}{=} (x+y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k}}_{\underset{k=l-1,\, l=k+1}{=} \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} x^l y^{n-l+1}} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \binom{n}{l-1} x^l y^{n-l+1} + \overbrace{\binom{n}{n}}^{=1} x^{n+1} y^0$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} + \binom{n}{0} x^0 y^{n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) x^k y^{n-k+1} + x^{n+1} + y^{n+1}$$

$$\overset{\text{Teil a)}}{=} \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k y^{n-k+1} + x^{n+1} + y^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n-k+1}$$

was der rechten Seite entspricht. Damit ist die Aussage bewiesen

1.5. Induktionsbeweis

Der Schritt von $k = 1$ zu $k + 1 = 2$ ist falsch!
Wenn man je 1 Pferd wegnimmt, ist das übriggebliebene Pferd zwar einfarbig, aber entgegen der Behauptung müssen die Farben nicht gleich sein.