2.1. Abbildungen

(a) (i) Da die Definitionsmenge mehr Elemente enthält als die Wertemenge, kann es surjektive, aber keine injektiven Abbildungen geben.

(ii) Zunächst berechnet man

$$\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 4x + 3 = 0\} \cup \{0,1\} = \{1,3\} \cup \{0,1\} = \{0,1,3\}$$

und

$$\{n \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq n^3 \leq 100\} = \{1,2,3,4\}.$$

Da die Definitionsmenge weniger Elemente enthält als die Wertemenge, kann es injektive, aber keine surjektiven Abbildungen geben.

(iii) Injektive Abbildungen existieren. Zum Beispiel ist die Funktion

$$2\mathbb{N} := \{2k \,|\, k \in \mathbb{N}\} \longrightarrow [0,1],\; x \longmapsto \frac{2}{\pi}\arctan(x)$$

eine injektive Funktion. Es existieren aber keine surjektiven Abbildungen. Wir beweisen dies mit dem Cantor'schen Diagonaltrick. Da $2\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind ($f(x) = 2x$ definiert eine Bijektion von $\mathbb{N}$ nach $2\mathbb{N}$), ist es äquivalent zu zeigen, dass keine surjektiven Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $[0,1]$ existieren.

Sei also $g : \mathbb{N} \longrightarrow [0,1]$ eine beliebige Funktion. Schreibe $g(n)$ in Dezimalentwicklung

$$g(n) = 0{,}a_{1n}\, a_{2n}\, a_{3n}\, \cdots .$$

Die Ziffern a_{kl} sind Zahlen aus $\{0,1,\cdots,9\}$. Betrachte nun die reelle Zahl

$$x = 0{,}x_1\, x_2\, x_3\, \cdots \in [0,1],$$

wobei $x_n = 4$ falls $a_{nn} = 5$ und $x_n = 5$ falls $a_{nn} \neq 5$ ist. Mit dieser Wahl für x sehen wir, dass $x \neq g(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Somit ist x nicht im Bild von g und g ist nicht surjektiv.

(b) (i) Kein Graph einer Funktion.

(ii) Graph einer bijektiven Funktion.

(iii) Graph einer weder surjektiven, noch injektiven Funktion.

(iv) Graph einer injektiven, aber nicht surjektiven Funktion.

(v) Graph einer surjektiven, aber nicht injektiven Funktion.

(vi) Graph einer nicht injektiven Funktion $[a,b] \to \mathbb{R}$, deren Wertebereich aber nicht in $[c,d]$ enthalten ist.

2.2. Bild und Urbild

(a) Definitionsgemäss gilt

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cup B_2 \\ &\Leftrightarrow \exists i \in \{1,2\} : f(x) \in B_i \\ &\Leftrightarrow \exists i \in \{1,2\} : x \in f^{-1}(B_i) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)\,. \end{aligned}$$

(b) Definitionsgemäss gilt

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cap B_2 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in \{1,2\} : f(x) \in B_i \\ &\Leftrightarrow \forall i \in \{1,2\} : x \in f^{-1}(B_i) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)\,. \end{aligned}$$

(c) Definitionsgemäss gilt

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B^c) &\Leftrightarrow f(x) \in B^c \\ &\Leftrightarrow f(x) \notin B \\ &\Leftrightarrow x \notin f^{-1}(B) \\ &\Leftrightarrow x \in \left(f^{-1}(B)\right)^c\,. \end{aligned}$$

(d) Im Allgemeinen gilt die Identität nicht! Um das zu sehen, brauchen wir ein Gegenbeispiel. Wir betrachten deshalb die Mengen

$$X = \{\heartsuit, \bigstar, \clubsuit\} = Y$$

und die Abbildung $f : X \to Y$ definiert durch

$$f(\heartsuit) = \heartsuit\,,$$

$$f(\bigstar) = \heartsuit\,,$$

$$f(\clubsuit) = \bigstar\,.$$

Sei nun $A = \{\clubsuit\}$. Dann gilt $f(A)^c = \{\heartsuit, \clubsuit\}$, aber $f(A^c)$ ist

$$f(A^c) = f(\{\heartsuit, \bigstar\}) = \{\heartsuit\}\,,$$

d.h. $f(A^c) \neq f(A)^c$ und wir sind fertig.

2.3. komplexe Zahlen -

2.4. Definitionsbereich und Umkehrfunktion

(a) x liegt in dem Definitionsbereich $\operatorname{dom}(f) \subset \mathbb{R}$, falls

- $x \geq 0$;
- $10 - \sqrt{x} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 10 \geq \sqrt{x} \Rightarrow x \leq 100 \;\wedge\; x \geq 0$;
- $3 - \sqrt{10 - \sqrt{x}} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 3 \geq \sqrt{10 - \sqrt{x}}$
  $\Rightarrow \quad 9 - 10 \geq -\sqrt{x} \;\wedge\; 0 \leq x \leq 100 \quad \Rightarrow \quad x \geq 1 \;\wedge\; x \leq 100$;

darum ist $x \in \operatorname{dom}(f)$ genau dann wenn $1 \leq x \leq 100$.

(b)
- $\sqrt{x}$ ist streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$,
- $10 - \sqrt{x}$ ist streng monoton fallend auf $[0, \infty)$,
- $\sqrt{10 - \sqrt{x}}$ ist streng monoton fallend auf $[0, 100]$,
- $10 - \sqrt{10 - \sqrt{x}}$ ist streng monoton wachsend auf $[0, 100]$,
- $\left(3 - \sqrt{10 - \sqrt{x}}\right)^{1/4}$ ist streng monoton wachsend auf $[1, 100]$;

deshalb ist f streng monoton wachsend auf $\operatorname{dom}(f)$ und $\operatorname{im}(f) = [f(1), f(100)] = [0, 3^{1/4}]$.

(c) $y = \left(3 - \sqrt{10 - \sqrt{x}}\right)^{1/4} \quad \Rightarrow \quad y^4 - 3 = -\sqrt{10 - \sqrt{x}}$
$\Rightarrow \quad (3 - y^4)^2 = 10 - \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} = -(9 - 6y^4 + y^8 - 10)$
$\Rightarrow \quad x = (-1 - 6y^4 + y^8)^2 = y^{16} - 12y^{12} + 34y^8 + 12y^4 + 1.$

Darum

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} [0, 3^{1/4}] & \to & [1, 100] \\ x & \mapsto & x^{16} - 12x^{12} + 34x^8 + 12x^4 + 1. \end{array}$$