3.1. Komplexe Zahlen

-

3.2. Stetigkeit

(a) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir zeigen Stetigkeit in x_0. Zu zeigen ist:

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in \mathbb{R} : \; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |x^2 - x_0^2| < \epsilon. \tag{1}$$

Sei also $\epsilon > 0$. Betrachte

$$\begin{aligned} |x^2 - x_0^2| &= |x - x_0||x + x_0| \\ &= |x - x_0||(x - x_0) + 2x_0| \\ &\leq |x - x_0| \left(|x - x_0| + 2|x_0|\right). \end{aligned}$$

Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ (wir wissen noch nicht wie wir δ wählen werden) gilt also

$$|x^2 - x_0^2| < \delta(\delta + 2|x_0|).$$

Das soll kleiner oder gleich ϵ sein. Wir haben folgende Äquivalenz:

$$\delta(\delta + 2|x_0|) \leq \epsilon \Leftrightarrow \delta \leq -|x_0| + \sqrt{|x_0|^2 + \epsilon}.$$

Also ist mit $\delta := -|x_0| + \sqrt{|x_0| + \epsilon}$ die Aussage (1) erfüllt.

(b) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Sei $\epsilon > 0$. Da f stetig in x_0 ist, existiert ein $\delta_1 > 0$, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta_1$ die Aussage $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ gilt. Da g stetig in x_0 ist, existiert ein $\delta_2 > 0$, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta_2$ die Aussage $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ gilt. Setze $\delta := \min(\delta_1, \delta_2) > 0$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$:

(i) Falls $f(x) \geq g(x)$ und $f(x_0) \geq g(x_0)$, dann

$$|\max(f, g)(x) - \max(f, g)(x_0)| = |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

(ii) Falls $g(x) \geq f(x)$ und $g(x_0) \geq f(x_0)$, dann

$$|\max(f, g)(x) - \max(f, g)(x_0)| = |g(x) - g(x_0)| < \epsilon.$$

(iii) Falls $f(x) \geq g(x)$ und $g(x_0) \geq f(x_0)$, dann

$$|\max(f, g)(x) - \max(f, g)(x_0)| = |f(x) - g(x_0)| < \epsilon,$$

weil

$$\epsilon > f(x) - f(x_0) \geq f(x) - g(x_0) \geq g(x) - g(x_0) > -\epsilon.$$

(iv) Falls $g(x) \geq f(x)$ und $f(x_0) \geq g(x_0)$, dann

$$|\max(f,g)(x) - \max(f,g)(x_0)| = |g(x) - f(x_0)| < \epsilon,$$

weil

$$\epsilon > g(x) - g(x_0) \geq g(x) - f(x_0) \geq f(x) - f(x_0) > -\epsilon.$$

3.3. Lipschitzstetigkeit

(a) Seien $\epsilon > 0$ und $x_0 \in D$. Weil $f : D \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig ist, gilt

$$|f(x) - f(x_0)| \leq K|x - x_0|\,, \quad \text{für alle } x \in D\,,$$

wobei $K \geq 0$ die Lipschitz-Konstante von f ist.

Falls $K = 0$ ist, dann ist f eine konstante Funktion, die offensichtlich stetig ist.

Falls $K > 0$ ist, setzen wir $\delta = \frac{\epsilon}{K}$. Dann gilt für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - f(x_0)| < K\delta = \epsilon\,,$$

d.h. f ist stetig im Punkt x_0.

(b) Sei $r > 0$ beliebig. Wir wollen zeigen, dass $f_r : [-r, r] \to \mathbb{R}$ Lipschitz stetig ist, das heisst wir wollen beweisen, dass eine Konstante $L_r > 0$ existiert, so dass

$$|f_r(x) - f_r(y)| \leq L_r|x - y| \quad \text{für alle } x, y \in [-r, r]. \tag{2}$$

Bevor wir dies aber beweisen, wollen wir zuerst folgende Idendität zeigen:

$$x^n - y^n = (x - y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k \tag{3}$$

Zunächst folgt durch ausmultiplizieren

$$(x - y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k = \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k}y^k - \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^{k+1}.$$

Wir sehen, dass in der ersten Reihe auf der rechten Seite der Term x^n vorkommt und in der zweiten Reihe der Term y^n. Wir trennen diese beiden Terme von der Summe, daraus folgt

$$(x - y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k = x^n + \sum_{k=1}^{n-1} x^{n-k}y^k - y^n - \sum_{k=0}^{n-2} x^{n-1-k}y^{k+1}.$$

Verschieben wir den Index in der zweiten Summe folgt

$$\begin{aligned}(x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k &= x^n - y^n + \sum_{k=1}^{n-1} x^{n-k}y^k - \sum_{k=1}^{n-1} x^{n-k}y^k \\ &= x^n - y^n,\end{aligned}$$

also genau Formel (3). Mithilfe dieser wollen wir nun (2) zeigen. Es folgt

$$\begin{aligned}|x^n - y^n| = \left|(x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k\right| &= |(x-y)| \cdot \left|\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k\right| \\ &\leq |x-y| \sum_{k=0}^{n-1} |x^{n-1-k}y^k|.\end{aligned}$$

Da $x, y \in [-r, r]$ gilt für die Summe auf der rechten Seite

$$\sum_{k=0}^{n-1} |x^{n-1-k}y^k| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |r^{n-1}| = nr^{n-1}.$$

Somit folgt

$$|x^n - y^n| \leq nr^{n-1}|x-y|$$

Definieren wir $L_r := nr^{n-1}$ entspricht diese Ungleichung genau (2), somit ist f_r Lipschitz stetig.

(c) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, da $r > 0$ beliebig war können wir r gross genug wählen, so dass $x_0 \in [-r, r]$ gilt. Sei $\varepsilon > 0$, wählen wir $\delta = \frac{\varepsilon}{L_r}$ so folgt für alle x für die $|x - x_0| < \delta$ gilt:

$$|x^n - x_0^n| \leq L|x - x_0| < L\delta = \varepsilon,$$

somit ist f stetig in x_0.

(d) Wir wollen zeigen, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht Lipschitz stetig ist. Dies wollen wir mithilfe eines Widerspruchbeweises zeigen. Wir nehmen also an, dass f Lipschitz ist, d.h. es existiert ein $L > 0$, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

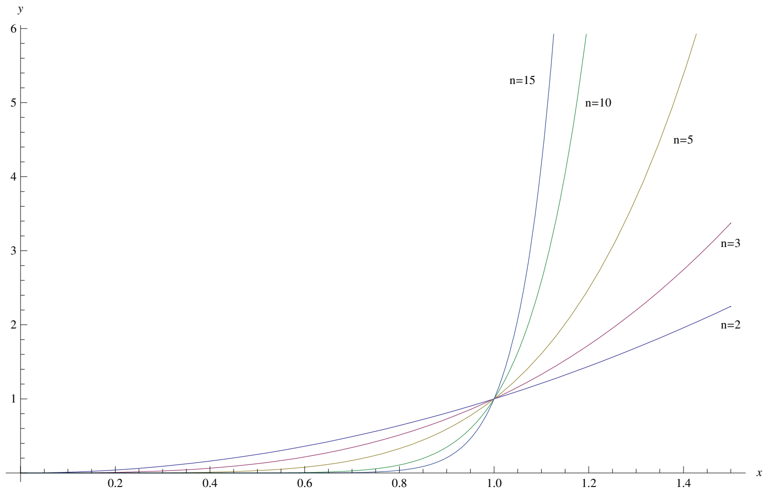
Aus dieser Ungleichung folgt

$$\frac{|x^n - y^n|}{|x-y|} \leq L \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}, \text{ mit } x \neq y.$$

Wählen wir $x = (2L)^{1/(n-1)}$ und $y = 0$ und setzen dies in obige Ungleichung, so folgt

$$\frac{|(2L)^{n/(n-1)} - 0^n|}{|(2L)^{1/(n-1)} - 0|} = \frac{|(2L)^{n/(n-1)}|}{|(2L)^{1/(n-1)}|} = (2L)^{(n-1)/(n-1)} = 2L \leq L.$$

Da $L > 0$ nach Annahme, ist dies ist aber ein Widerspruch, somit kann $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht Lipschitz stetig sein.



Plot von x^n für $n = 2, 3, 5, 10, 15$.

3.4. Stetigkeit und Grenzwerte

(a) Da $x^2 - b = (x - b)(x + b)$ ist, gilt $g(x) = x + b$ für $x \neq b$. Also ist

$$\lim_{x \to b} g(x) = \lim_{x \to b}(x + b) = 2b.$$

(b) Damit $g(x)$ stetig ist an der Stelle $x = b$, muss gelten

$$\lim_{x \to b} g(x) = g(b),$$

also $2b = 0$. Damit sehen wir, dass $g(x)$ an der Stelle $x = b$ stetig ist, genau dann, wenn $b = 0$ ist.

3.5. Zwischenwertsatz

Falls $f(0) = 0$ oder $f(1) = 1$ ist, ist nichts zu zeigen. Wir diskutieren den Fall, dass dem nicht so ist.

Setze $g : [0, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x - f(x)$. Es gilt $g(0) < 0 < g(1)$. Also existiert ein z mit $g(z) = 0$, welches nach Definition von g erfüllt, dass $f(z) = z$.