4.1. Komplexe Zahlen

-

4.2. Stückweise stetige Funktion

(a) Auf den Intervallen $(-\infty, 0)$, $[0, 1]$ und $(1, \infty)$ ist f jeweils stetig als Komposition von einfachen Funktionen.

(b) Da $\lim_{x\to 0^-} 3\sqrt{-x} + 1 = 1$ ist, muss der Wert von $cx + d$ an der Stelle $x = 0$ gleich 1 sein. Somit ist also $d = 1$. Weiters gilt $\lim_{x\to 1^+} x^{10} - 1 = 0$. Der Wert von $cx + d$ muss also in $x = 1$ gleich 0 sein. Also erhalten wir $c = -1$. Auf $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ist f jeweils eine Komposition stetiger Funktionen und somit stetig. Damit ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig genau dann wenn $d = 1$ und $c = -1$.

4.3. Grenzwerte

(a) Wir sehen

$$\lim_{x\to\pi} \frac{x^2 - \pi x + 3}{x^2 + \pi^2} = \frac{\pi^2 - \pi^2 + 3}{\pi^2 + \pi^2} = \frac{3}{2\pi^2}.$$

(b) Wir faktorisieren und erhalten

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 + 19x - 20}{|x - 1| + (x - 1)\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x - 1)(x + 20)}{|x - 1| + (x - 1)\sqrt{x}}.$$

Da wir uns von rechts an 1 annähern, ist $(x - 1) > 0$. Somit erhalten wir weiter

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(x - 1)(x + 20)}{|x - 1| + (x - 1)\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x + 20}{1 + \sqrt{x}} = \frac{21}{2}.$$

(c) Da der Sinus und der Cosinus auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \sin\{\pi\cos(\sin(x))\} &= \sin\left\{\pi \lim_{x\to 0} \cos(\sin(x))\right\} \\
&= \sin\left\{\pi\cos\left(\lim_{x\to 0}\sin(x)\right)\right\} \\
&= \sin\{\pi\cos(\sin(0))\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(d) Es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{|x|+e}-\sqrt{-x}\right) &= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{-x+e}-\sqrt{-x}\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x+e+x}{\sqrt{-x+e}+\sqrt{-x}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{e}{\sqrt{-x+e}+\sqrt{-x}}=0\,.
\end{aligned}$$

Da der Logarithmus auf ganz $(0,\infty)$ stetig ist, können wir den Grenzwert hineinziehen und erhalten

$$\lim_{x\to-\infty}\log\left(e^2+\sqrt{|x|+e}-\sqrt{-x}\right)=\log(e^2)=2\,.$$

(e) Es gilt $\lim_{x\to100}(x-100)\sin\left(\frac{1}{x-100}\right)=\lim_{z\to0}z\sin\left(\frac{1}{z}\right)$. Da $\sin\left(\frac{1}{z}\right)\in[-1,1]$ für alle $z\neq0$ und somit beschränkt ist, folgt unmittelbar, dass $\lim_{z\to0}z\sin\left(\frac{1}{z}\right)=0$.

4.4. Konvergenz

Mit der dritten binomischen Formel folgt

$$\frac{\sqrt{1+a_n}-1}{a_n}=\frac{1+a_n-1}{a_n(\sqrt{1+a_n}+1)}=\frac{1}{\sqrt{1+a_n}+1}.$$

Da $a_n\to0$ für $n\to\infty$, konvergiert der Ausdruck rechts gegen $\frac{1}{2}$ und damit folgt die Behauptung.

4.5. Arithmetisches Mittel

(a) Sei $\epsilon>0$ gegeben. Da $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert, gibt es $N(\epsilon)\in\mathbb{N}$, sodass

$$\forall n>N(\epsilon)\ :\ |a_n-a|<\frac{\epsilon}{2}.$$

Definiere

$$M(\epsilon)=\max_{1\le k\le N(\epsilon)}|a_k-a|$$

Dann erhalten wir für $n>N(\epsilon)$:

$$|s_n-a|\le\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_\epsilon}(a_k-a)\right|+\left|\frac{1}{n}\sum_{k=N_\epsilon+1}^{n}(a_k-a)\right|\le\frac{N(\epsilon)}{n}\cdot M(\epsilon)+\frac{n-N_\epsilon}{n}\cdot\frac{\epsilon}{2}$$

Aus dieser Abschätzung folgt sofort

$$\limsup_{n\to\infty} |s_n - a| \leq \left(\lim_{n\to\infty} \frac{N(\epsilon)M(\epsilon)}{n}\right) + \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n - N(\epsilon)}{n} \cdot \frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{\epsilon}{2}$$

Insbesondere gibt es $N'(\epsilon) > N(\epsilon)$, sodass

$$|s_n - a| < \epsilon \qquad \forall n > N'(\epsilon).$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, beweist dies die Konvergenz von s_n gegen a.

(b) Betrachte als Beispiel $a_n = (-1)^n$. Dann gilt

$$s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Insbesondere gilt $|s_n| \leq \frac{1}{n}$ und folglich konvergiert s_n gegen 0.