5.1. sup, inf, max, min

(a) Beachte zuerst, dass $\frac{2}{k} \leq \frac{2}{1} = 2$ für alle $k \in \mathbb{N} \subset \{0\}$. Da $2 \in A$ gilt somit $\sup(A) = \max(A) = 2$. Andererseits gilt auch $\frac{2}{k} > 0$ für alle k und $\lim_{k\to\infty} \frac{2}{k} = 0$. Damit ist $\inf(A) = 0$, während, $\min(A)$ nicht existiert.

(b) Die Äquivalenz $x \leq M \Leftrightarrow -M \leq -x$ bedeutet, dass $-M$ genau dann eine untere Schranke für $-A$ ist, falls M eine obere Schranke für A ist. Insbesondere ist $M' = \sup A$ eine obere Schranke für A und es folgt dann mit der Eigenschaft des Infimums

$$\inf(-A) \geq -M' = -\sup A.$$

Entsprechend ist $-M'' = \inf(-A)$ eine untere Schranke von $-A$ und es folgt aus der Eigenschaft des Supremums:

$$\sup(A) \leq M'' = -\inf(-A).$$

Beide Ungleichungen liefern zusammen die Behauptung $\inf(-A) = -\sup(A)$.

(c) Nach Voraussetzung gilt $\inf(A) > 0$, also insbesondere $x > 0$ für alle $x \in A$. Für $M > 0$ und $x \in A$ haben wir dann die Äquivalent $x \leq M \Leftrightarrow M^{-1} \leq x^{-1}$. Ausgehend von dieser Äquivalenz, verläuft der Beweis völlig analog zu Teil (a).

5.2. Grenzwerte

(a) Da der Limes mit Addition und Division vertauscht werden kann, gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 5n}{3n^2 - 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{5}{n}}{3 - \frac{2}{n^2}} = \frac{1}{3}$$

(b) Die Folge divergiert. Grund: Es gilt $|a_n - a_{n+1}| = 2n + 1$, d.h. die Differenz aufeinander folgender Folgengleider konvergiert nicht gegen 0, was für konvergente Folgen der Fall ist.

(c) Wir erweitern mit der dritten binomischen Formel und erhalten:

$$0 \leq a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

(d) Durch Vertauschen des Limes mit dem Produkt erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}\frac{1}{2^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot \frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}}{k!}\cdot\frac{n^k}{2^n} \\
&= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!}\right)\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{2^n}\right) \\
&= \frac{1}{k!}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{2^n}\right) = 0
\end{aligned}$$

Den letzten Grenzwert setzen wir als bekannt voraus.

(e) Wir nutzen aus, dass $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$ für alle z mit $|z| < 1$. Hier haben wir $z = \frac{1+i}{4}$ mit Betrag $|z| = \frac{1}{4}|1+i| = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Also ist er Grenzwert 0.

(f) Hier nutzen wir, dass für n gross genug gilt, dass $\frac{n^2+5n}{3n^2-2} \leq \frac{1}{2}$ (da nach Teilaufgabe a) der Grenzwert $\frac{1}{3}$ ist). Damit ist

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+5n}{3n^2-2}\right)^n \leq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

Da andererseits jedes $a_n > 0$ ist, folgt, dass der Grenzwert tatsächlich 0 ist.

5.3. Konvergenz von Reihen

(a) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ konvergiert nach dem Quotientenkriterium. Denn mit $a_n := \frac{n!}{n^n}$ gilt für alle $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{(n+1)!n^n}{n!(n+1)^{n+1}} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \\
&\leq \frac{1}{2} < 1\,,
\end{aligned}$$

wobei wir die Bernoullische Ungleichung benutzt haben.

(b) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^4}{3^n}$ konvergiert ebenfalls nach dem Quotientenkriterium. Denn mit $a_n := \frac{n^4}{3^n}$ gilt für alle $n \geq 4$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^4 3^n}{3^{n+1}n^4} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^4 \leq \frac{1}{3}\left(\frac{5}{4}\right)^4 < 1\,.$$

(c) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$ divergiert. Denn für alle $n \geq 3$ gilt

$$a_n = \frac{n+4}{n^2-3n+1} = \frac{1+\frac{4}{n}}{n-3+\frac{1}{n}} > \frac{1}{n}\,.$$

(d) Auf $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n}$ wenden wir das Leibnizsche Konvergenzkriterium an. Es ist

$$\frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n} = (-1)^n a_n$$

mit

$$a_n = \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}\,.$$

Wir haben zu zeigen, dass $(a_n)_{n\geq 1}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Es gilt

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} \leq \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \leq \frac{3}{n}\,,$$

also $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Ausserdem ist

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)^n} = \frac{((n+1)^2)^n}{(n(n+2))^n} \\ &= \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^n > 1\,, \end{aligned}$$

also ist $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend.

5.4. Konvergenzradius

(a) Wir nutzen das Quotienkriterium mit $a_k = \frac{1}{k}$. Dann ist

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} = 1.$$

(b) Wir setzen $a_n := \frac{1}{(3n+1)^4}$ und berechnen

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3(n+1)+1}{3n+1}\right)^4 \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{3n+4}{3n+1}\right)^4 \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3+\frac{4}{n}}{3+\frac{1}{n}}\right)^4 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Der Limes existiert insbesondere und liefert damit den gesuchten Konvergenzradius. Es gilt also $\rho = 1$.

(c) Wir setzen $a_n := (\ln(7n))^n$. Da der Koeffizient eine Potenz ist, bietet sich die Verwendung des Wurzelkriteriums für die Berechnung des Konvergenzradius an. Wegen

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \ln(7n) = \infty$$

folgt

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = 0.$$

(d) Wir setzen $a_n := \frac{1}{n\pi^n}$ und berechnen

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\pi^{n+1}}{n\pi^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\pi = \pi\,.\end{aligned}$$

Der Limes existiert insbesondere und liefert damit den gesuchten Konvergenzradius. Es gilt also $\rho = \pi$.

(e) Wir unterscheiden danach, ob $\alpha \in \mathbb{N}$ oder nicht. In ersterem Falle sind die Koeffizienten $\binom{\alpha}{k}$ irgendwann alle 0 und wir haben tatsächlich eine endliche Summe, welche immer Konvergenzradius $\rho = \infty$ hat.

Sei also $\alpha \notin \mathbb{N}$. Dann wissen wir insbesondere, dass alle $\binom{\alpha}{k} \neq 0$. Wir nutzen dann das Quotientenkriterium:

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}}{\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(k+1)+1)}{(k+1)!}} \right| \\ &= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k+1}{\alpha-k} \right| = 1,\end{aligned}$$

wobei wir brauchen, dass α eine Konstante ist. Zusammengefasst gilt also

$$\rho = \begin{cases} \infty & \alpha \in \mathbb{N} \\ 1 & \alpha \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

Beachte: Wenn man direkt die Identität $\binom{\alpha}{k+1}(k+1) = \binom{\alpha}{k}(\alpha-k)$ einsetzt, vereinfacht sich die Rechnung.