6.1. Konvergenz

(a) Durch Vertauschen der Summationsreihenfolge erhalten wir:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)b_k &= \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}b_k - \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \\ &= a_{n+1}b_{n+1} - a_1 b_1 + \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}b_k - \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}b_{k+1} \\ &= a_{n+1}b_{n+1} - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}(b_{k+1}-b_k)\end{aligned}$$

(b) Der Konvergenzradius ρ ist nach dem Quotientenkriterium gegeben durch

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Folglich konvergiert die Potenzreihe absolut in dem Einheitskreis $\{|z| < 1\}$ und divergiert auf $\{|z| > 1\}$. Über das Konvergenzverhalten auf der Kreislinie $\{|z| = 1\}$ trifft das Quotientenkriterium keine Aussage.

Sei nun $|z| = 1$. Für $z = 1$ erhalten wir die harmonische Reihe, die bekanntlich divergiert. Für $z = -1$ erhalten wir die alternierende harmonische Reihe, welche nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert. Wir wollen zeigen, dass die Reihe für alle $z \neq 1$ mit $|z| = 1$ konvergiert. Dazu verwenden wir die partielle Summationsregel aus (a) mit

$$a_k = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{k-1} = \frac{1-z^k}{1-z}, \qquad b_k = \frac{1}{k}.$$

Dann gilt $a_{k+1} - a_k = z^k$ und wir erhalten

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k} = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{z^{n+1}-1}{z-1} - 1 - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)\frac{1-z^k}{1-z}. \tag{1}$$

Wir müssen zeigen, dass die rechte Seite für $n \to \infty$ konvergiert. Die Terme vor der Summe konvergieren offenbar gegen -1, da

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\cdot\frac{z^{n+1}-1}{z-1}\right| \leq \frac{2}{|z-1|}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

Hierbei haben wir $|z^{n+1}| = |z|^{n+1} = 1$ und $z \neq 1$ benutzt. Die Reihe auf der rechten Seite konvergiert sogar absolut, denn es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)\frac{1-z^k}{1-z}\right| \leq \frac{2}{|z-1|}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{2}{|z-1|}$$

Insbesondere konvergiert die rechte Seite in (1) mit $|z| = 1$, $z \neq 1$ für $n \to \infty$ und das zeigt die Behauptung.

6.2. Komplexe Zahlen

-

6.3. Komplexe Gleichungen

Wir schreiben komplexe Zahlen als $z = x + \mathbf{i}y$.

(a) Der senkrechte Streifen zwischen $x = 0$ und $x = 1$.

(b) Die Parabel $y^2 = 2x + 1$

(c) Wir berechnen explizit die linke Seite als Ausdruck in x und y:

$$\left|\frac{z}{z+1}\right|^2 = \frac{|z|^2}{|z+1|^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2+2x+1+y^2}$$

Die Gleichung ist damit äquivalent zu

$$\begin{aligned} 4(x^2+2x+1+y^2) = x^2+y^2 &\Leftrightarrow 3x^2+8x+4+3y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3\left(x+\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} + 3y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x+\frac{4}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist also der Kreis mit Radius $2/3$ um den Punkt $-4/3 + 0\mathbf{i}$ in der komplexen Zahlenebene.

(d) Wenn wir die Gleichung explizit in x und y ausdrücken, erhalten wir:

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2} + \sqrt{(x+2)^2+y^2} = 5$$

durch zweimaliges quadrieren erhalten wir

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (x-2)^2+y^2 = 25 - 10\sqrt{(x+2)^2+y^2} + (x+2)^2+y^2 \\ &\Leftrightarrow 8x+25 = 10\sqrt{(x+2)^2+y^2} \\ &\Rightarrow 64x^2+400x+625 = 100(x^2+4x+4+y^2) \\ &\Leftrightarrow (6x)^2+(10y)^2 = 15^2. \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge liegt also auf der Ellipse $(6x)^2 + (10y)^2 = 15^2$. Umgekehrt gilt, wenn (x, y) die ursprüngliche Gleichung erfüllt, dann erfüllen alle 4 Punkte $(\pm x, \pm y)$ ebenfalls die Gleichung. Wir können also $x \geq 0$ annehmen und dann gilt in obiger Rechnung auch die Rückrichtung. Somit liefert jeder Punkt auf dieser Ellipse auch eine Lösung der ursprünglichen Gleichung.

Geometrisch sind -2 und $+2$ die Brennpunkte der Ellipse und die Summe der beiden Abstände eines Punktes auf der Ellipse zu den beiden Brennpunkten ist jeweils 5.

(e) Da der Betrag einer komplexen Zahl reell ist gilt trivialerweise für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\{-1\}$

$$\left|\frac{z-\mathbf{i}}{z+1}\right| \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Im}\left(\left|\frac{z-\mathbf{i}}{z+1}\right|\right) = 0.$$

Die Lösungsmenge ist somit die gesammte komplexe Ebene.

(f) Die Gleichung ist äquivalent zu:

$$|z-\mathbf{i}|^2 = |z+1|^2 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + y^2 \Leftrightarrow -2y = 2x$$

Die Lösungsmenge ist also die Gerade $y = -x$.

6.4. Allgemeine Potenzen

(a) $a^0 = e^{0\log(a)} = e^0 = 1$. (Dabei folgt $e^0 = 1$ direkt aus der Definition der Exponentialfunktion.)

(b) $a^1 = e^{1\log(a)} = e^{\log(a)} = a$. (Der Logaritmus ist per Definition die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.)

(c) Aus der Eigenschaft $e^{u+v} = e^u e^v$ der Exponentialfunktion folgt

$$a^{z+w} = e^{(z+w)\log(a)} = e^{z\log(a)+w\log(a)} = e^{z\log(a)}e^{w\log(a)} = a^z a^w.$$

(d) Wenn wir den Logarithmus von $a^x = e^{x\log(a)}$ bilden, erhalten wir die Rechenregel $\log(a^x) = x\log(a)$. Damit folgt

$$(a^x)^z = e^{\log(a^x)z} = e^{x\log(a)z} = a^{xz}.$$

(e) Aus $e^{\log(ab)} = ab = e^{\log(a)}e^{\log(b)} = e^{\log(a)+\log(b)}$ folgt die Rechenregel $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$. Damit erhalten wir

$$(ab)^z = e^{\log(ab)z} = e^{\log(a)z+\log(b)z} = e^{\log(a)z}e^{\log(b)z} = a^z b^z.$$

(f) Aus der Reihendarstellung der Exponentialfunktion folgt sofort die Rechenregel $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$. Mit der Beziehung $|z|^2 = z\bar{z}$ erhalten wir

$$|e^z|^2 = e^z e^{\bar{z}} = e^{z+\bar{z}} = e^{2\operatorname{Re}(z)} = \left(e^{\operatorname{Re}(z)}\right)^2$$

und folglich $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$. Hieraus folgt die allgemeine Regel:

$$|a^z| = \left|e^{\log(a)z}\right| = e^{\operatorname{Re}(\log(a)z)} = e^{\log(a)\operatorname{Re}(z)} = a^{\operatorname{Re}(z)}.$$

6.5. Trigonometrische Formeln

Für $x = 0$ sind die Summen trivalerweise gleich n bzw. 0. Da $\sin(x)$ und $\cos(x)$ perodische Funktionen mit Periode 2π sind, können wir im folgenden $x \in (0, 2\pi)$ annehmen.

Mit der Eulerschen Formel (und $\sin(0) = 0$) folgt

$$\sum_{k=0}^{n} \exp(\mathbf{i}kx) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) + \mathbf{i} \sum_{k=1}^{n} \sin(kx)$$

oder mit anderen Worten

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \exp(\mathbf{i}kx)\right), \qquad \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} \exp(\mathbf{i}kx)\right).$$

Wir erhalten mit der Formel für die geometrische Summe

$$\sum_{k=0}^{n} \exp(\mathbf{i}kx) = \sum_{k=0}^{n} \exp(\mathbf{i}x)^k = \frac{1 - \exp(\mathbf{i}x)^{n+1}}{1 - \exp(\mathbf{i}x)}.$$

und umformen liefert

$$\begin{aligned}\frac{1 - \exp(\mathbf{i}x)^{n+1}}{1 - \exp(\mathbf{i}x)} &= \frac{e^{\mathbf{i}x\frac{n+1}{2}}\left(e^{-\mathbf{i}x\frac{n+1}{2}} - e^{\mathbf{i}x\frac{n+1}{2}}\right)}{e^{\mathbf{i}\frac{x}{2}}\left(e^{-\mathbf{i}\frac{x}{2}} - e^{\mathbf{i}\frac{x}{2}}\right)} = e^{\mathbf{i}\frac{n}{2}x} \cdot \frac{\sin\left(-\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(-\frac{x}{2}\right)} \\ &= \left(\cos\left(\frac{nx}{2}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

und

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$