7.1. Inverse

Wir wollen die Gleichung

$$\sinh(x) = y$$

nach y auflösen. Dafür setzen wir die Identität

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

ein und erhalten

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y.$$

Nun multiplizieren wir auf beiden Seiten mit $2e^x$ und erhalten

$$e^{2x} - 1 = 2ye^x.$$

Wir substituieren nun $z := e^x$. Damit haben wir die Gleichung

$$z^2 - 2yz - 1 = 0.$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind

$$z_{1,2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

Da $z = e^x > 0$ ist, ist nur $z = y + \sqrt{y^2 + 1}$ die Lösung, welche uns interessiert. Damit ist die Umkehrfunktion von $\sinh(x)$ gegeben durch

$$k^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad y \mapsto \log(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

7.2. Ableitungen I

ETH zürich

Aufgabe 7.2. Ableitungen I

a) Wir wissen von Satz (2.15), dass wir Potenzreihen im Inneren ihres Konvergenzbereichs gliedweise ableiten dürfen. Da der Konvergenzradius der Potenzreihen von cos und sin ∞ ist, dürfen wir dies also für alle x so tun. Es gilt dann:

$$\cos'(x) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{2j}}{(2j)!}\right)' = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (x^{2j})'}{(2j)!}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j\, 2j\, x^{2j-1}}{(2j)!}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{2j-1}}{(2j-1)!} \overset{j=k+1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= -\sin(x)$$

$$\sin'(x) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{2j+1}}{(2j+1)!}\right)' = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (x^{2j+1})'}{(2j+1)!}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (2j+1) x^{2j}}{(2j+1)!}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{2j}}{(2j)!} = \cos(x)$$

b) Wir nutzen die Quotientenregel, um $\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ abzuleiten:

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\sin'(x)\cdot\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{(\cos(x))^2}$$

$$\overset{a)}{=} \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \underline{\underline{\frac{1}{\cos^2(x)}}} \quad \left(= 1 + \tan^2(x)\right)$$

7.3. Ableitungen II

(a) Der Ausdruck $\log(\sin x)$ ist für $x \in (0, \pi)$ wohldefiniert, da dann $\sin(x) > 0$ gilt. Anwendung der Kettenregel ergibt

$$\frac{d}{dx}(\log(\sin(x))) = \frac{1}{\sin(x)} \sin'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

(b) Wir schreiben $a^x = e^{x \log(a)}$ und erhalten

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \log(a) e^{x \log(a)} = \log(a) a^x.$$

(c) Es gilt $x^x = e^{x \log x}$. Unter Anwendung der Ketten- und anschliessend der Produktregel erhalten wir

$$\frac{d}{dx}(x^x) = \left[\frac{d}{dx}(x \log x)\right] e^{x \log x} = \left(\frac{x}{x} + \log x\right) e^{x \log x} = (1 + \log x) x^x.$$

(d) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(9x^7 + 3x^{-5} - 3x^{-11}) &= 7 \cdot 9x^6 + (-5)3x^{-6} - (-11)3x^{-12} \\ &= 63x^6 - 15x^{-6} + 33x^{-12}. \end{aligned}$$

(e) Wir verwenden zuerst die Kettenregel und dann die Quotientenregel:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}} &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}}} \cdot \frac{(2x-3)(x^2-7x+12) - (x^2-3x+2)(2x-7)}{(x^2-7x+12)^2} \\ &= \frac{(x^2-7x+12)^{\frac{1}{2}}}{2(x^2-3x+2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(-4x^2+20x-22)}{(x^2-7x+12)^2} \\ &= \frac{-2x^2+10x-11}{(x^2-3x+2)^{\frac{1}{2}}(x^2-7x+12)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

(f) Mit den Beziehungen

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$$

und der Kettenregel folgt

$$\frac{d}{dx}(\log(\cosh x)) = \frac{\frac{d}{dx}(\cosh x)}{\cosh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \tanh x.$$

(g) Mit der Kettenregel folgt:

$$\frac{d}{dx}(\log(\log(\log x))) = \frac{1}{\log(\log x)} \cdot \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \log x \cdot \log(\log x)}.$$

(h) Es gilt $a^b = e^{b \log a}$. Daher ist $3^x = e^{x \log 3}$ und es folgt

$$\frac{d}{dx}(3^x) = \frac{d}{dx}(e^{x \log 3}) = (\log 3) e^{x \log 3} = (\log 3) 3^x.$$

Mit der Produktregel erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} 3^x x^3 &= 3^x \cdot 3x^2 + (\log 3) 3^x x^3 \\ &= 3^x x^2 (3 + x \log 3). \end{aligned}$$

7.4. Ableitungen III

Aus der Definition erhalten wir direkt

$$\frac{f_\alpha(h) - f_\alpha(0)}{h} = \frac{|h|^{\alpha+1} - 0}{h} = |h|^\alpha \frac{|h|}{h}\,,$$

d.h.

$$\frac{f_\alpha(h) - f_\alpha(0)}{h} = |h|^\alpha \operatorname{sign} h\,.$$

Deshalb existiert der Limes für h gegen Null genau dann, wenn $\alpha > 0$ ist. In diesem Fall bekommen wir

$$f'_\alpha(0) = \lim_{h \to 0} |h|^\alpha \operatorname{sign} h = 0\,.$$

7.5. Extremalstellen

(a) Da f stetig und das Definitionsintervall kompakt ist, existiert ein globales Maximum und ein globales Minimum. Dieses liegt entweder am Rand des Definitionsbereichs oder im Innern. Da f im Innern differenzierbar ist, muss es im letzteren Fall ein kritischer Punkt sein. Wir rechnen:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 8 = (3x+4)(x-2) = 0 \;\Leftrightarrow\; x \in \left\{2,\; -\frac{4}{3}\right\}.$$

Die einzigen Kandidaten für globale Extremstellen sind also die Randpunkte -2, 2 und der innere Punkt $-\frac{4}{3}$. Die Funktionswerte an diesen Stellen lauten:

$$\begin{aligned} f(2) &= -11, \\ f(-\tfrac{4}{3}) &= \tfrac{203}{27} \approx 7.519, \\ f(-2) &= 5. \end{aligned}$$

Der grösste dieser Werte ist der bei $x = -\frac{4}{3}$, der kleinste der bei $x = 2$. Somit hat f ein globales Maximum bei $x = -\frac{4}{3}$ und ein globales Minimum bei $x = 2$.

(b) Da f stetig und das Definitionsintervall kompakt ist, existiert ein globales Maximum und ein globales Minimum. Wenn es im Innern des Definitionsbereichs liegt, so muss es ein kritischer Punkt von f sein, da f dort differenzierbar ist. Wir rechnen:

$$f'(x) \;=\; \frac{1\cdot(x^2+1) - 2x(x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2} = 0.$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$-x^2 - 2x + 1 = 0$$

ist, also für

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{-2} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Der Wert $-1-\sqrt{2} < -1$ liegt nicht im Definitionsintervall von f, der Wert $-1+\sqrt{2}$ dagegen schon. Die Kandidaten für globale Extremalstellen sind also $\left\{-1, -1+\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right\}$. Die Funktionswerte an diesen Stellen sind:

$$\begin{aligned} f(-1) &= 0, \\ f(-1+\sqrt{2}) &= \tfrac{\sqrt{2}}{2-2\sqrt{2}+2} = \tfrac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} \cdot \tfrac{4+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} = \tfrac{4(\sqrt{2}+1)}{8} = \tfrac{\sqrt{2}+1}{2} = 1.207\ldots, \\ f(\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{6}{5} = 1.2. \end{aligned}$$

Der grösste dieser Werte ist der bei $x = -1+\sqrt{2}$, der kleinste der bei $x = -1$. Somit hat f ein globales Maximum bei $x = -1+\sqrt{2}$ und ein globales Minimum bei $x = -1$.

(c) Da f stetig und das Definitionsintervall kompakt ist, existiert ein globales Maximum und ein globales Minimum. Wir bestimmen die kritischen Punkte von f:

$$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} + (x-1)\cdot(-x)e^{-\frac{x^2}{2}} = (1+x-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$$

Wegen $e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$ ist dies äquivalent zu

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Die kritischen Punkte von f sind somit

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Beide Werte liegen im Innern des Definitionsintervalls. Die Kandidaten für globale Extremstellen sind also die Randpunkte $x = -1$ und $x = 2$ sowie die kritischen Punkte $x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Die Funktionswerte an diesen Stellen sind:

$$\begin{aligned}
f(-1) &= -\tfrac{2}{\sqrt{e}} = -1.213\ldots, \\
f(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}) &= -\tfrac{1+\sqrt{5}}{2} e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{4}} = -1.336\ldots, \\
f(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}) &= \tfrac{-1+\sqrt{5}}{2} e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{4}} = 0.166\ldots, \\
f(2) &= \tfrac{1}{e^2} = 0.135\ldots.
\end{aligned}$$

Der grösste dieser Werte ist der bei $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, der kleinste der bei $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Somit hat f ein globales Maximum bei $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und ein globales Minimum bei $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.