8.1. Differenzierbarkeit

Es ist klar, dass f auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ beliebig oft differenzierbar ist und dass für alle $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ gilt

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0\,, \\ c_k x^{n+1-k}, & \text{falls } x > 0\,, \end{cases}$$

wobei

$$c_k = \prod_{m=n-k+2}^{n+1} m\,.$$

Wir zeigen jetzt durch Induktion, dass die k-te Ableitung von f für alle $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ auch in Nullpunkt existiert und dass gilt

$$f^{(k)}(0) = 0 \quad \text{für alle } k \in \{0, 1, \cdots, n\}\ .$$

Dann ist $f^{(k)}$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

`Induktionsanfang:` $k = 0$.

Trivial, denn $f^{(0)}(0) = f(0) = 0$.

`Induktionsschritt:` $k \to k + 1, (k < n)$.

Wir haben zu zeigen, dass der Differenzenquotient

$$\frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x - 0}$$

für $x \to 0$ gegen Null konvergiert. Es ist

$$\left| \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x - 0} \right| \leq \left| \frac{c_k x^{n-k+1}}{x} \right| = |c_k x^{n-k}|\,.$$

Da $n - k \geq 1$, strebt dies für $x \to 0$ gegen Null.

Man sieht zudem, dass $\lim_{x\to 0} f^{(k)}(x) = 0$ für $k \in \{0, \ldots, n\}$, somit ist f tatsächlich n-mal stetig differenzierbar.

Die $(n+1)$-te Ableitung existiert übrigens nicht mehr, denn $\lim_{x\to 0, x>0} \frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x-0} = c_n \neq 0$, während $\lim_{x\to 0, x<0} \frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x-0} = 0$

8.2. Taylorreihen I

(a) Aus der geometrischen Reihe:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

für $|x| < 1$ folgt:

$$\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{1-x} = -\sum_{k=0}^{\infty} x^k \text{ für } |x| < 1$$

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-(-\frac{x}{2})} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^k \text{ für } |x| < 2$$

$$\frac{1}{x-3} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}} = -\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^k \text{ für } |x| < 3$$

(b) Es gilt für alle $|x| < 1$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^3-2x^2-5x+6} &= \frac{1}{(x-1)(x+2)(x-3)} = -\frac{1}{6(x-1)} + \frac{1}{15(x+2)} + \frac{1}{10(x-3)} \\
&= \frac{1}{6}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{30}\frac{1}{1+\frac{x}{2}} - \frac{1}{30}\frac{1}{1-\frac{x}{3}} \\
&= \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{\infty} x^k + \frac{1}{30}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^k - \frac{1}{30}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6} + \frac{(-1)^k}{15\cdot 2^{k+1}} - \frac{1}{10}\frac{1}{3^{k+1}}\right)x^k.
\end{aligned}$$

(c) Man kann die gesuchten Anfangsglieder der Taylorreihe durch wiederholtes Differenzieren der Funktion f berechnen. Wir wählen hier eine andere Möglichkeit. Die gegebene Funktion ist das Produkt zweier Funktionen mit bekannter Taylor-Entwicklung, $f(x) = g(x)h(x)$, wobei

$$g(x) := \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

und

$$h(x) := \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,.$$

Die Taylor-Entwicklung von f ergibt sich als Cauchy-Produkt dieser beiden Potenzreihen,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \,, \quad \text{mit} \;\; c_n = \sum_{k+\ell=n} a_k b_\ell \,,$$

wobei

$$a_k = \frac{(-1)^k}{2^{k+1}}$$

und

$$b_\ell = \begin{cases} 0 & \text{falls } \ell \text{ gerade,} \\ (-1)^{\frac{\ell-1}{2}} \cdot \frac{1}{\ell!} & \text{falls } \ell \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Damit erhalten wir $c_0 = 0$ und

$$c_1 = a_0 b_1 = \frac{1}{2} \,,$$

$$c_2 = a_1 b_1 = -\frac{1}{4} \,,$$

$$c_3 = a_0 b_3 + a_2 b_1 = -\frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{1}{24} \,,$$

Der Anfang der Taylor-Reihe der Funktion f lautet also

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{24} + R_4(f,0)(x) \,.$$

8.3. Fehlerabschätzung

Aus der Vorlesung ist bekannt

$$\sin x = p_{2n+1}(\sin x, 0)(x) + R_{2n+1}(\sin x, 0)(x) \,,$$

wobei

$$R_{2n+1}(\sin x, 0)(x) = \frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

mit $\xi \in (0, x)$ ist.

Für $x = 1$ gilt somit

$$R_{2n+1}(\sin x, 0)(1) = \frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}$$

mit $\xi \in (0,1)$. Wir schätzen das Restglied mit

$$|R_{2n+1}(\sin x, 0)(1)| = \left|\frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\right| \leq \frac{1}{(2n+2)!}$$

ab. Weil wir einen Fehler kleiner als $(100!)^{-1}$ wollen, setzen wir die Bedingung

$$\frac{1}{(2n+2)!} < (100!)^{-1}$$

durch. Das ist äquivalent zu $2n+1 > 99$. Deshalb wird die Lösung der Aufgabe durch $2n+1 = 101$ gegeben.

Tatsächlich reicht schon $2n+1 = 99$. Dies kann man wie folgt sehen: Die Taylorreihe von $\sin x$ besteht nur aus Termen mit ungeraden Potenzen von x. Somit gilt

$$p_{2n+1}(\sin x, 0)(x) = p_{2n+2}(\sin x, 0)(x),$$

also

$$R_{2n+1}(\sin x, 0)(x) = R_{2n+2}(\sin x, 0)(x).$$

Letzteres lässt sich schärfer abschätzen mit der Formel vom Restglied:

$$|R_{2n+2}(\sin x, 0)(1)| = \left|\frac{\sin^{(2n+3)}(\xi)}{(2n+3)!}\right| \leq \frac{1}{(2n+3)!}.$$

Für $2n+1 = 99$ gilt also schon

$$|R_{2n+1}(\sin x, 0)(1)| = |R_{2n+2}(\sin x, 0)(1)| < (100!)^{-1}.$$

8.4. Taylorreihen II

(a) Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g(x) = e^{x^2+4x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(x+4)^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k 4^{n-k}\right) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} x^{n+k} \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{0\leq n\leq m} a_{n,m-n}\right) x^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{0\leq n\leq m} \binom{n}{m-n} \frac{4^{2n-m}}{n!}\right) x^m \end{aligned}$$

mit

$$a_{n,k} = \binom{n}{k} \frac{4^{n-k}}{n!}.$$

Beachten Sie, dass $a_{n,k} = 0$, falls $k > n$. Somit gilt die Gleichung (*), obwohl in der zweiten Summe Terme mit $k > n$ vorkommen und in der ersten Summe nur Terme mit $a_{n,k}$ und $k \leq n$.

(b) Beachte, dass $(x-2)^2 + 4(x-2) = x^2 - 4$. Folglich gilt

$$e^{x^2-4} = g(x-2) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{0 \leq n \leq m} \binom{n}{m-n} \frac{4^{2n-m}}{n!} \right) (x-2)^m$$

8.5. Logarithmus

(a) Definiere $f(x) = \log(1+x)$.

$n = 1$: $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{1+x}$, also stimmt die Aussage für $n = 1$. (Wir verwenden die Konvention $0! = 1$.)

$n \geq 2$: Angenommen die Aussage gilt für $n-1$. Wir zeigen die Aussage für n. Berechne

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{d^n x} f(x) = \frac{d}{dx} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(x) &= \frac{d}{dx} (-1)^{n-2} (n-2)! \frac{1}{(1+x)^{n-1}} \\ &= (-1)^{n-2} (n-2)! (-(n-1)) \frac{1}{(1+x)^n} \\ &= (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{1}{(1+x)^n}.\end{aligned}$$

Im zweiten Schritt haben wir die Induktionsannahme benutzt.

(b) Die Taylorreihe von $\log(1+x)$ ist somit

$$\begin{aligned}p_\infty(f,0)(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k.\end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| &= \left|\frac{(-1)^n n!}{(1+\xi)^n}\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \\ &= \frac{1}{n+1}\left|\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^n}\right| \leq \frac{1}{n+1},\end{aligned}$$

wobei wir bei der letzten Gleichung $\xi \geq 0$ und $x \leq 1$ benutzt haben.

(d) Aus der Restgliedabschätzung für Taylorpolynome folgt

$$\log(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

für ein $0 \leq \xi \leq x$. Somit folgt aus der Abschätzung in c)

$$\left|\log(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k\right| \leq \frac{1}{n+1}.$$

(e) Da $\frac{1}{n+1} \to 0$ für $n \to \infty$, folgt

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$$

für $0 \leq x \leq 1$. Insbesondere folgt für $x = 1$

$$\log(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$