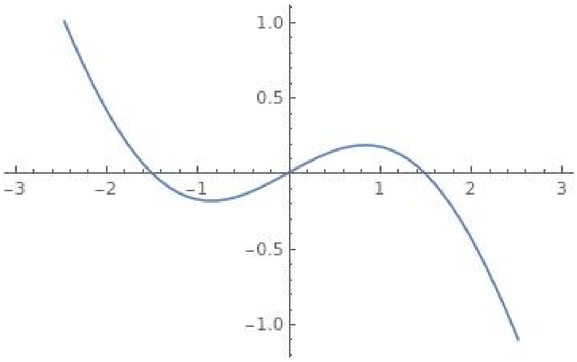
9.1. Newtonverfahren

(a) $x_{n+1} = x_n - \frac{\sin(x) - \frac{2x}{3}}{\cos(x) - \frac{2}{3}}$.

(b) Setzen wir verschiedene Werte ein, sehen wir, dass wir gegen verschiedene Nullstellen konvergieren können, auch wenn die Startwerte nahe beieinander sind. Dies kann geschehen, wenn man Anfangswerte nahe bei einem lokalen Maximum oder Minimum wählt, wo also die Ableitung eher klein ist. Man sieht auch, dass nach einigen grossen Schritten die Werte plötzlich nahe bei einer der Nullstellen $\pm 1.49578\ldots$ oder 0 sind. (Einige Schritte mit Mathematica: siehe nächste Seite.)

Der folgende Plot zeigt die drei Nullstellen:



```
In[1]:= f[x_] := x - (Sin[x] - 2 x / 3) / (Cos[x] - 2 / 3)

In[2]:= f[0.904]

Out[2]= 4.70399

In[3]:= f[f[0.904]]

Out[3]= -1.42276

In[4]:= f[f[f[0.904]]]

Out[4]= -1.50088

In[5]:= f[f[f[f[0.904]]]]

Out[5]= -1.4958

In[6]:= f[0.905]

Out[6]= 4.64301

In[7]:= f[f[0.905]]

Out[7]= -0.918122

In[8]:= f[f[f[0.905]]]

Out[8]= -3.99092

In[9]:= f[f[f[f[0.905]]]]

Out[9]= -1.42042

In[10]:= f[f[f[f[f[0.905]]]]]

Out[10]= -1.50123

In[11]:= f[f[f[f[f[f[0.905]]]]]]

Out[11]= -1.49581

In[12]:= f[0.906]

Out[12]= 4.58393

In[13]:= f[f[0.906]]

Out[13]= -0.508976

In[14]:= f[f[f[0.906]]]

Out[14]= 0.207298

In[15]:= f[f[f[f[0.906]]]]

Out[15]= -0.0094787

In[16]:= f[f[f[f[f[0.906]]]]]
```

Out[16]= 8.51729×10^{-7}

9.2. Lineare Differentialgleichung

(a) Für die Diffgleichung $y'' + y' = 0$ ist das charakteristische Polynom

$$\mathrm{chp}(\lambda) = \lambda^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1$$

also ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 + c_2 \cdot e^{-x}$$

(b) Einsetzen der Anfangsbedingungen gibt die Bedingung

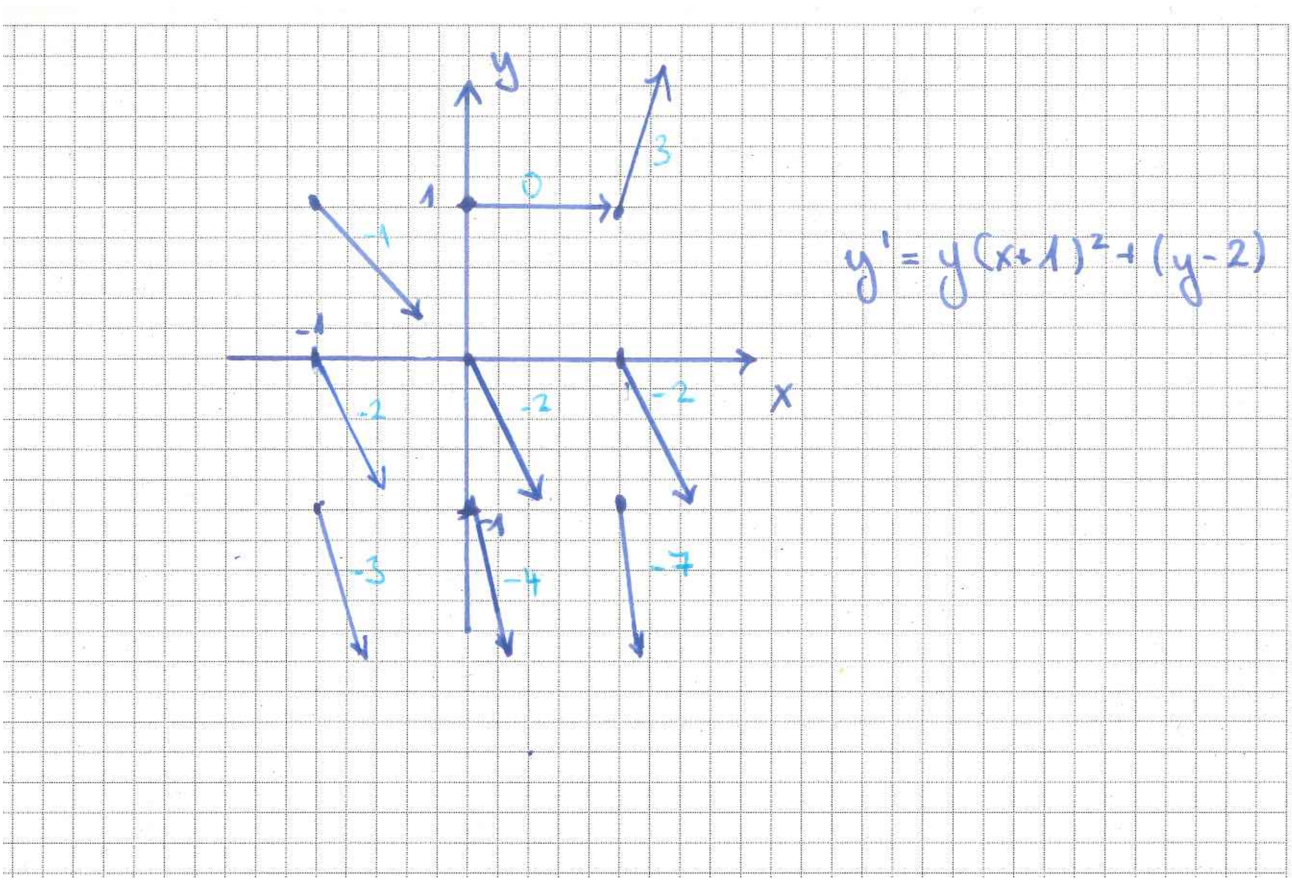
$$y(1) = c_1 + c_2 \cdot e^{-1} \stackrel{!}{=} 1 \text{ und } y'(1) = -c_2 e^{-1} \stackrel{!}{=} 2$$

Also ist $c_2 = -2e$ und $c_1 = 1 + 2 \cdot e \cdot e^{-1} = 3$, d.h. die Lösung ist

$$y(x) = 4 - 2 \cdot e \cdot e^{-x} = 3 - 2 \cdot e^{1-x}.$$

9.3. Richtungsfeld einer Differentialgleichung erster Ordnung

Zu jedem Punkt wird ein Vektor/ eine Gerade assoziiert mit Steigung $y(x+1)^2+(y-2)$. Das ergäbe in dem Fall dann (die hellblauen Zahlen geben jeweils die Steigung an):



ETH zürich

9.3. Differentialgleichungen

$h' = -|h|^{\alpha}$

a) Für $\alpha = \frac{1}{2}$ wollen wir zeigen, dass die rechte Seite Lipschitz-stetig ist. Wir betrachten dazu

$$|h_1^2 - h_2^2| = |(h_1 + h_2)(h_1 - h_2)| \leq (|h_1| + |h_2|)\,|h_1 - h_2|$$

Ist nun h_i beschränkt, gibt uns das eine Lipschitzkonstante. Genauer: die Funktion

$$K : [-R, R] \to \mathbb{R}$$
$$h \mapsto h^2$$

ist Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstant $L = 2R$.

Dies gilt für jedes R, weshalb wir mit dem Eindeutigkeitssatz nicht nur lokale, sondern letztlich sogar globale Eindeutigkeit kriegen.

b) Wir überprüfen zuerst, dass

$$h(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{2}\right)^2 & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

eine Lösung ist. Es ist für $x < 0$:

$$h'(x) = \frac{1}{2}x = -\sqrt{|h(x)|} \quad \checkmark$$

Für $x > 0$ ist die Gleichung sowieso erfüllt, bleibt $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x} = 0 = -\sqrt{|h(0)|} \quad \checkmark$$

Also ist $h(x)$ eine Lösung.

Mit der gleichen Argumentation sind dann aber auch alle "verschobenen" Funktion $h_c(x) := h(x + c)$, $c > 0$, Lösungen mit $h_c(0) = 0$.

ETH zürich

9.4. gedämpfte Schwingung

a) Das charakteristische Polynom von $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 0$ ist $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+2)(\lambda+1)$, also $\lambda = -2$, $\lambda = -1$.
Die allgemeine Lösung ist dann

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}.$$

b) Aus $y(0) \overset{!}{=} 1$ folgt $c_1 + c_2 = 1 \Rightarrow c_1 = 1 - c_2$, die Lösung hat dann die Form

$$y(t) = (1-c_2) e^{-2t} + c_2 e^{-t}$$
$$= e^{-t} \left(c_2 + (1-c_2) e^{-t} \right)$$

Da $e^{-t} > 0$ für alle t hat $y(t)$ eine Nullstelle genau dann, wenn $c_2 + (1-c_2) e^{-t}$ eine Nullstelle hat. Lösen wir dies nach t auf, erhalten wir

$$c_2 + (1-c_2) e^{-t} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad c_2 = -(1-c_2) e^{-t}$$
$$\Leftrightarrow \quad e^{t} = -\frac{1-c_2}{c_2} = 1 - \frac{1}{c_2}$$

(unter der Annahme, dass $c_2 \neq 0$, ansonsten existiert offensichtlich keine Lösung.)
Da $e^{t} \in (1, \infty)$ für $t \in (0, \infty)$ und alle Werte in $(1, \infty)$ angenommen werden, suchen wir alle c_2, so dass $1 - \frac{1}{c_2} \in (1, \infty)$.
Dies ist erfüllt genau für $c_2 \in (-\infty, 0)$.
Wir berechnen nun noch, welchen Werten von $y'(0)$ dies entspricht:

$$y'(t) = -2c_1 e^{-2t} - c_2 e^{-t}$$
$$\Rightarrow y'(0) = -2c_1 - c_2 \overset{c_1 = 1-c_2}{=} -2 + c_2 \overset{c_2 < 0}{<} -2$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{y'(0) < -2}}$$