10.1. Erstellen einer Differentialgleichung

(a) Das charakteristische Polynom sollte also die Nullstellen -1, 1, π und $-\pi$ haben. Das liefert uns

$$(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda+\pi)(\lambda-\pi) = \lambda^4 - \lambda^2(\pi^2+1) + \pi^2.$$

Somit ist die gesuchte Gleichung

$$y^{(4)}(x) - y''(x)(\pi^2+1) + \pi^2 y(x) = 0.$$

(b) Die Lösung e^{-10x} stammt von der Nullstelle -10 des charakteristischen Polynoms, und $e^{3x}\cos(3x)$ von den komplex konjugierten Nullstellen $3+3i$ und $3-3i$. Somit erhalten wir das charakteristische Polynom

$$(\lambda+10)(\lambda-3-3i)(\lambda-3+3i) = \lambda^3 + 4\lambda^2 - 42\lambda + 180.$$

Das liefert uns die Gleichung

$$y'''(x) + 4y''(x) - 42y'(x) + 180y(x) = 0.$$

10.2. Homogene Differentialgleichungen

(a) Das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda+2)(\lambda-1)$$

mit den beiden verschiedenen Nullstellen $\lambda = -2$ und $\lambda = 1$. Die allgemeine Lösung ist deshalb

$$y(x) = Ae^{-2x} + Be^{x}.$$

(b) Das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^2 + 6\lambda + 13$$

mit den beiden verschiedenen Nullstellen $\lambda = -3+2i$ und $\lambda = -3-2i$. Die allgemeine Lösung ist deshalb

$$y(x) = Ae^{(-3+2i)x} + Be^{(-3-2i)x}$$

oder

$$y(x) = \tilde{A}e^{-3x}\cos(2x) + \tilde{B}e^{-3x}\sin 2x.$$

(c) Das charakteristische Polynom

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

hat eine doppelte Nullstelle bei $\lambda = 1$. Die allgemeine Lösung ist deshalb

$$y(x) = Ae^x + Bxe^x.$$

(d) Das charakteristische Polynom

$$\lambda^4 - 4\lambda^2 = \lambda^2(\lambda + 2)(\lambda - 2)$$

hat eine doppelte Nullstelle bei $\lambda = 0$ und einfache Nullstellen bei $\lambda = -2$ und $\lambda = 2$. Die allgemeine Lösung ist deshalb

$$y(x) = A + Bx + Ce^{-2x} + De^{2x}.$$

10.3. Differentialgleichungen mit Anfangsbedingungen

(a) Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

ist

$$\mathrm{chp}(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2 = (\lambda - i)^2 \cdot (\lambda + i)^2,$$

und die Nullstellen sind

$$\lambda_1 = \lambda_2 = i, \quad \text{und} \quad \lambda_3 = \lambda_4 = -i$$

Damit ist die allg. Lösung eine Linearkombination aus den Funtkionen

$$e^{ix}, \quad xe^{ix}, \quad e^{-ix}, \quad xe^{-ix}$$

oder äquivalent dazu (da y eine reelle Funktion sein soll und $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$) eine Linearkombination der Funktionen

$$\sin(x), \quad x\sin(x), \quad \cos(x), \quad x\cos(x),$$

d.h.

$$y(x) = c_1 \cdot \sin(x) + c_2 x \cdot \sin(x) + c_3 \cdot \cos(x) + c_4 \cdot x\cos(x)\ .$$

Wir müssen die Ableitungen der allgemeinen Lösung $y(x)$ berechnen und die Anfangsbedingungen verwenden um die Konstanten zu bestimmen.
Es gilt

$$y(0) = c_3 \overset{!}{=} 0,$$

d.h. wir haben nur noch

$$y(x) = c_1 \cdot \sin(x) + c_2 x \cdot \sin(x) + c_4 \cdot x \cos(x)$$

Es ist also

$$y'(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \cdot (\sin(x) + x \cdot \cos(x)) + c_4(-x \sin(x) + \cos(x))$$

und

$$y'(0) = c_1 + c_4 \overset{!}{=} 0.$$

Für die zweite Ableitung bekommen wir also

$$y''(x) = -c_1 \sin(x) + c_2(-x \sin(x) + 2\cos(x)) + c_4(-2\sin(x) - x\cos(x))$$

und damit

$$y''(0) = 2c_2 \overset{!}{=} 0$$

also auch $c_2 = 0$.
Damit erhalten wir für die dritte Ableitung

$$y'''(x) = -c_1 \cos(x) + c_4(-3\cos(x) + x \cdot \sin(x))$$

und

$$y'''(0) = -c_1 - 3c_4 \overset{!}{=} 1.$$

Damit haben wir für die letzten zwei Konstanten c_1 und c_4 das Gleichungssystem

$$c_1 + c_4 = 0 \text{ und } -c_1 - 3c_4 = 1 \Leftrightarrow c_1 = 1/2 \text{ und } c_4 = -1/2.$$

Die gesuchte Lösung lautet also

$$y(x) = \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}x\cos(x).$$

(b) Für die Differentialgleichung

$$y'' + 2qy' + (q + q^2)y = 0$$

ist die charakteristische Gleichung

$$\text{chp}(\lambda) = \lambda^2 + 2q\lambda + (q + q^2) = 0$$

also sind die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2q \pm \sqrt{4q^2 - 4(q + q^2)}}{2} = -q \pm \sqrt{-q}.$$

Wir treffen nun Fallunterscheidungen für q je nachdem ob die Nullstellen reell, positiv, negative,... sind.

$q > 0$:

In diesem Fall sind die Nullstellen nicht reel, sondern es gilt

$$\lambda_{1,2} = -q \pm i\sqrt{q}$$

und die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = e^{-q\cdot x} \cdot (c_1 \cos(\sqrt{q}x) + c_2 \sin(\sqrt{q}x)),$$

d.h. die Lösungen sind alle beschränkt für $q > 0$ für $x \to \infty$ (sie streben sogar gegen Null!).

$q = 0$:

Die Nullstellen sind $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ und damit ist die allg. Lösung

$$y(x) = c_1 + c_2 \cdot x$$

und die Lösung ist nur beschränkt für $x \to \infty$ falls $c_2 = 0$, sonst ist die Lösung unbeschränkt.

$q < 0$: Die Nullstellen sind reel und die allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 x}.$$

Ausserdem gilt stets, dass $\lambda_1 = -q + \sqrt{-q} > 0$ ist und damit sind Lösungen mit $c_1 \neq 0$ sicher nicht beschränkt.

Insgesamt erhalten wir also, dass nur für den Fall $q > 0$ alle Lösungen beschränkt sind.

10.4. Inhomogene Differentialgleichung

Wir betrachten getrennt die Probleme

$$2y'' + 3y' + 10y = \sin(2x) \tag{1}$$

und

$$2y'' + 3y' + 10y = 1. \tag{2}$$

Zuerst lösen wir das homogene Problem

$$2y'' + 3y' + 10y = 0.$$

Das charakteristische Polynom lautet

$$\operatorname{chp}(\lambda) = 2\lambda^2 + 3\lambda + 10$$

und besitzt die Nullstellen

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}\left(-3 + i\sqrt{71}\right) \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{1}{4}\left(-3 - i\sqrt{71}\right).$$

Also ist die allgemeine homogene reelle Lösung $y_h(x)$ von (1) und (2)

$$y_h(x) = e^{-\frac{3}{4}x}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{71}}{4}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{71}}{4}x\right)\right) \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Es bleibt also eine partikuläre Lösung für (1) und (2) zu bestimmen. Für (1) machen wir den Ansatz

$$y_{p_1}(x) = C_3 \sin(2x) + C_4 \cos(2x).$$

Erklärung: $\sin(2x) = \frac{1}{2i}e^{2ix} - \frac{1}{2i}e^{-2ix}$. Nach Satz (3.20) (und (3.19)) wäre also $A_0 e^{2ix} + A_1 e^{-2ix}$ als Ansatz für die partikuläre Lösung zu wählen. Dies lässt sich aber zu $C_3 \cos(2x) + C_4 \sin(2x)$ umschreiben. Vgl. auch mit der Tabelle auf Seite 255 des Skripts.

Einsetzen in (1) liefert

$$(2C_3 - 6C_4)\sin(2x) + (2C_4 + 6C_3)\cos(2x) = \sin(2x).$$

Mittels Koeffizientenvergleich erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2C_3 - 6C_4 &= 1 \\ 2C_4 + 6C_3 &= 0 \end{aligned}$$

Wir finden

$$C_3 = \frac{1}{20} \quad \text{und} \quad C_4 = -\frac{3}{20}.$$

Also ist

$$y_{p_1}(x) = \frac{1}{20}\sin(2x) - \frac{3}{20}\cos(2x)$$

eine partikuläre Lösung von (1). Nun bestimmen wir eine partikuläre Lösung von (2). Dazu machen wir den Ansatz

$$y_{p_2}(x) = C_5.$$

Durch Einsetzen berechnen wir $C_5 = \frac{1}{10}$, somit ist $y_{p_2}(x) = \frac{1}{10}$ eine Lösung von (2). Damit ist

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) \\ &= e^{-\frac{3}{4}x}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{71}}{4}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{71}}{4}x\right)\right) + \frac{1}{20}\sin(2x) - \frac{3}{20}\cos(2x) + \frac{1}{10} \end{aligned}$$

die allgemeine Lösung von

$$2y'' + 3y' + 10y = \sin(2x) + 1.$$

10.5. Lineare Unabhängigkeit

ETH zürich

10.5. Lineare Unabhängigkeit

Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} \equiv 0 \qquad \text{(als Funktion)}$$

Wir können annehmen, dass $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$ und werden nacheinander zeigen $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0$.
Die Idee ist, dass $e^{\lambda_1 t}$ viel schneller wächst als die anderen, und deshalb für genügend grosse t dieser Anteil dominiert. Genauer:
Für alle t gilt

$$\alpha_1 + \alpha_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + \dots + \alpha_n e^{(\lambda_n - \lambda_1)t} = 0$$

Also gilt dies auch für den Grenzwert.

$$0 = \lim_{t \to \infty} \Big(\alpha_1 + \alpha_2 \underbrace{e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}}_{\to 0,\ \text{da } \lambda_2 < \lambda_1} + \dots + \alpha_n \underbrace{e^{(\lambda_n - \lambda_1)t}}_{\to 0,\ \text{da } \lambda_n < \lambda_1} \Big)$$

$$= \alpha_1$$

Also muss $\alpha_1 = 0$ gelten. Mit dem gleichen Argument zeigen wir dann, dass auch $\alpha_2 = 0, \dots$ bis schliesslich $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. $\square$