11.1. Inhomogene Differentialgleichungen I

(siehe nächste zwei Seiten)

11.2. Inhomogene Differentialgleichung II

Das homogene Problem ist

$$y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0,$$

mit dem charakteristischen Polynom

$$\mathrm{chp}(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1.$$

Dieses hat die offensichtliche Nullstelle $\lambda_1 = 1$ und es folgt mittels Polynomdivision

$$\mathrm{chp}(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda^2 + 1).$$

Somit ist die allgemeine reelle Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(x) = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 \cos(x) + C_4 \sin(x).$$

Es bleibt die partikuläre Lösung $y_p(x)$ zu finden. Dazu machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = Ax^2 e^x,$$

denn $y_h = (C_1 + C_2 x)e^x$ ist bereits eine homogene Lösung. Einsetzen liefert

$$4Ae^x = e^x.$$

Somit ist

$$y_p(x) = \frac{1}{4}x^2 e^x,$$

eine partikuläre Lösung. Die allgemeine Lösung $y(x)$ ist somit

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 \cos(x) + C_4 \sin(x) + \frac{1}{4}x^2 e^x$$

ETH zürich

Aufgabe 11.1: Inhomogene Differentialgleichung

a) $y'' - 2y' = \cosh(x)$

homogene Lösung: $\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0,\ \lambda = 2$

$y_h(x) = c_1 + c_2 e^{2x}$

Ansatz partikuläre Lösung: $y_p(x) = \alpha \cosh(x) + \beta \sinh(x)$

$y_p' = \alpha \sinh x + \beta \cosh x$

$y_p'' = \alpha \cosh x + \beta \sinh x$

$y_p'' - 2y_p' = \alpha \cosh x + \beta \sinh x - 2\alpha \sinh x - 2\beta \cosh x$

$\stackrel{!}{=} \cosh x$

Koeffizientenvergleich: $\begin{cases} \beta - 2\alpha = 0 & (\sinh x) \\ \alpha - 2\beta = 1 & (\cosh x) \end{cases}$

$\Rightarrow \beta = 2\alpha \Rightarrow \alpha - 4\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{3},\ \beta = -\frac{2}{3}$

$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \underline{\underline{c_1 + c_2 e^{2x} - \frac{1}{3}\cosh x - \frac{2}{3}\sinh x}}$

b) $y'' - y = \cosh(x)$

homogene Lösung: $\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

$y_h(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$

Ansatz partikuläre Lösung: $y_p(x) = \alpha x \cosh x + \beta x \sinh x$

(beachte, dass $\cosh(x)$ Teil der homogenen Lösung ist und deshalb nicht als Ansatz taugt.)

$y_p' = \alpha \cosh x + \alpha x \sinh x + \beta \sinh x + \beta x \cosh x$

$y_p'' = 2\alpha \sinh x + \alpha x \cosh x + 2\beta \cosh x + \beta x \sinh x$

$y_p'' - y_p = 2\alpha \sinh x + \cancel{\alpha x \cosh x} + 2\beta \cosh x + \cancel{\beta x \sinh x}$

$- \cancel{\alpha x \cosh x} - \cancel{\beta x \sinh x} \stackrel{!}{=} \cosh x$

ETH zürich

Koeffizientenvergleich : $\begin{cases} 2\alpha = 0 \\ 2\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 0 , \beta = \frac{1}{2}$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \underline{\underline{c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x \sinh x}}$$

c) $y'' - y' = \cosh(x)$

homogene Lösung : $y_h(x) = c_1 + c_2 e^x$

Ansatz partikuläre Lösung :

$y_p(x) = \alpha \cosh x + \beta \sinh x + \gamma x \cosh + \delta x \sinh x$

...

$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{4} , \beta = -\frac{1}{4} , \gamma = \frac{1}{2} , \delta = \frac{1}{2}$

$$y(x) = \underline{\underline{c_1 + c_2 e^x + \frac{1}{4}(\cosh x - \sinh x) + \frac{1}{2} x (\cosh x + \sinh x)}}$$

Vereinfachung : Schreibe $\cosh(x) = \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} e^{-x}$

1 ist Eigenwert $\rightsquigarrow x e^x$ als Ansatz

-1 ist kein Eigenwert $\rightsquigarrow e^{-x}$ als Ansatz

$\rightsquigarrow y_p(x) = A x e^x + B e^{-x}$

...

$\Rightarrow A = \frac{1}{2} , B = \frac{1}{4}$

$$y(x) = \underline{\underline{c_1 + c_2 e^x + \frac{1}{2} x e^x + \frac{1}{4} e^{-x}}}$$

(was dasselbe ist wie obige Lösung)

11.3. Harmonischer Oszillator

Das charakteristische Polynom $\lambda^2+\omega^2$ der homogenen Differentialgleichung $\ddot{x}+\omega^2 x = 0$ hat Nullstellen $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. Daraus folgt, dass die allgemeine Lösung des homogenen Problems

$$x_h(t) = A\,\cos(\omega t) + B\,\sin(\omega t)$$

ist. Der Ansatz für die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung hängt von ν ab:

(a) $\omega \neq \nu$: Wir machen den Ansatz $x_p(t) = C\cos(\nu t) + D\sin(\nu t)$. Das liefert

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= -\nu C\sin(\nu t) + \nu D\cos(\nu t), \\ \ddot{x}_p(t) &= -\nu^2 C\cos(\nu t) - \nu^2 D\sin(\nu t). \end{aligned}$$

Setzt man das in die Differentialgleichung $\ddot{x} + \omega^2 x = \sin(\nu t)$ ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \sin(\nu t) &= -\nu^2 C\cos(\nu t) - \nu^2 D\sin(\nu t) + \omega^2(C\cos(\nu t) + D\sin(\nu t)) \\ &= C(\omega^2-\nu^2)\cos(\nu t) + D(\omega^2-\nu^2)\sin(\nu t), \end{aligned}$$

d.h. $C = 0$ und $D = (\omega^2-\nu^2)^{-1}$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist somit

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = A\,\cos(\omega t) + B\,\sin(\omega t) + \frac{1}{\omega^2-\nu^2}\sin(\nu t).$$

Wegen der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ muss $A = 0$ sein. Mit der ersten Ableitung

$$\dot{x}(t) = \omega B\cos(\omega t) + \frac{\nu}{\omega^2-\nu^2}\cos(\nu t)$$

und $\dot{x}(0) = 0$ gilt ferner

$$B = -\frac{\nu}{\omega}\cdot\frac{1}{\omega^2-\nu^2}.$$

Damit haben wir die Lösung:

$$x(t) = -\frac{\nu}{\omega}\cdot\frac{1}{\omega^2-\nu^2}\sin(\omega t) + \frac{1}{\omega^2-\nu^2}\sin(\nu t)$$

(b) $\omega = \nu$: Wir machen den Ansatz $x_p(t) = t\,(C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t))$. Das liefert

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= (C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)) + t\,(-\omega C\sin(\omega t) + \omega D\cos(\omega t)), \\ \ddot{x}_p(t) &= 2(-\omega C\sin(\omega t) + \omega D\cos(\omega t)) + t\,(-\omega^2 C\cos(\omega t) - \omega^2 D\sin(\omega t)). \end{aligned}$$

Setzt man das in die Differentialgleichung $\ddot{x} + \omega^2 x = \sin(\omega t)$ ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \sin(\omega t) &= 2(-\omega C \sin(\omega t) + \omega D \cos(\omega t)) + t\,(-\omega^2 C \cos(\omega t) - \omega^2 D \sin(\omega t)) \\ &\quad + \omega^2 t\,(C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t)) \\ &= -2\omega C \sin(\omega t) + 2\omega D \cos(\omega t), \end{aligned}$$

d.h. $C = -\frac{1}{2\omega}$ und $D = 0$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist somit

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = A\,\cos(\omega t) + B\,\sin(\omega t) - \frac{t}{2\omega}\cos(\omega t).$$

Wegen der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ muss $A = 0$ sein. Mit der ersten Ableitung

$$\dot{x}(t) = \omega B \cos(\omega t) - \frac{1}{2\omega}\cos(\omega t) + \frac{t}{2}\sin(\omega t)$$

und $\dot{x}(0) = 0$ gilt ferner

$$B = \frac{1}{2\omega^2}.$$

Damit haben wir die Lösung:

$$x(t) = \frac{1}{2\omega^2}\sin(\omega t) - \frac{t}{2\omega}\cos(\omega t)$$

(c) Abbildung 1 zeigt die berechneten Auslenkungen $x(t)$ für den Fall $\omega = 1$, $\nu = \frac{1}{2}$ (durchgehende Linie) bzw. $\omega = \nu = 1$ (gestrichelte Linie). Man erkennt, dass die Amplitude für $\omega \neq \nu$ beschränkt bleibt, wohingegen sie für $\omega = \nu$ mit der Zeit immer grösser wird. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von einer Resonanzkatastrophe. Aus mathematischer Sicht ist der Term $\frac{t}{2\omega}\cos(\omega t)$ in der Lösung von Teilaufgabe **b)** für diesen Effekt verantwortlich.

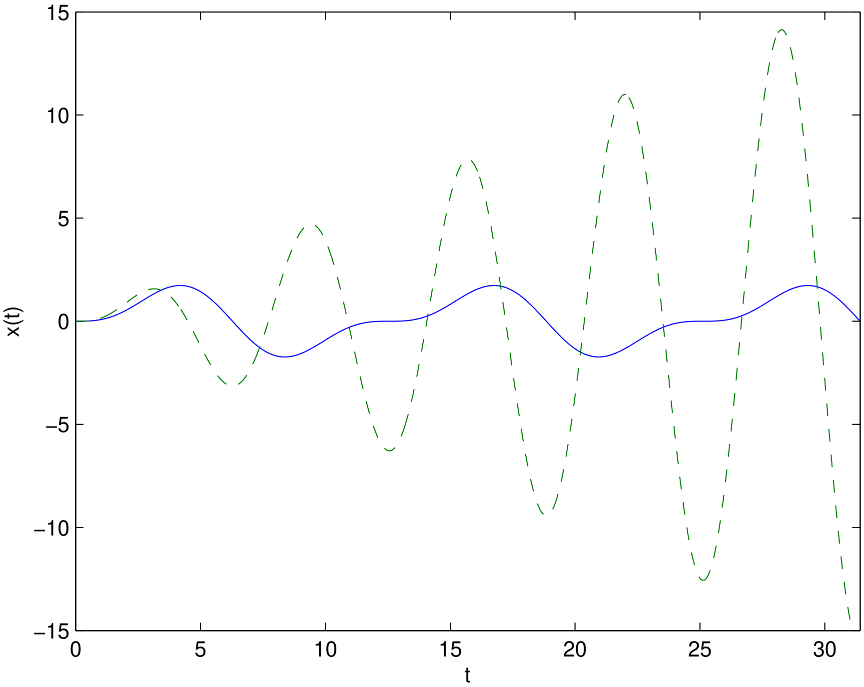

Abbildung 1: Auslenkungen $x(t)$ für $t \in [0, 10\pi]$

11.4 Schwach gedämpfter Harmonischer Oszillator

(für mehr Details: Blatter Skript ab S.256)

$my'' + by' + fy = K(t)$,

a) $m\lambda^2 + b\lambda + f = 0$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mf}}{2m} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{f}{m}}$$

$$= -\delta \pm i\omega_*$$

$$\Rightarrow y(t) = c_1 e^{-\delta t}\cos(\omega_* t) + c_2 e^{-\delta t}\sin(\omega_* t)$$

b) $e^{-\delta t} \to 0$, $t \to \infty$ (da $\delta > 0$) und cos/sin sind beschränkt, also $y(t) \to 0$ für $t \to \infty$.

c) Ansatz: $y_p(t) = c e^{i\omega t}$

$y_p' = c i\omega e^{i\omega t}$, $y_p'' = -c\omega^2 e^{i\omega t}$

$$m y_p'' + b y_p' + f y = c e^{i\omega t}(-m\omega^2 + bi\omega + f)$$

$$\overset{!}{=} K_0 e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow c = \frac{K_0}{f - m\omega^2 + ib\omega} = \frac{K_0}{m}\,\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega}$$

d) $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

Aus b) wissen wir, dass $y_h(t) \to 0$, also gilt, dass $y(t) - y_p(t) \to 0$, $t \to \infty$

e) $|c| = \frac{K_0}{m}\,\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$, ist maximal,

falls $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2$ minimal ist.

Ableiten und 0 setzen ergibt $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta}$
($\omega = 0$ ist lokales Maximum, $\omega = -\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta}$ ist zwar auch Min., aber wir wollen $\omega \geq 0$.)

ETH zürich

f) Da die Koeffizienten der Differentialgleichung reell sind, können wir auch einfach den Realteil der partikulären Lösung für $K_0 e^{i\omega_0 t}$ nehmen, also

$$y_p(t) = \mathrm{Re}\left(c e^{i\omega_0 t}\right) = \mathrm{Re}(c)\cos(\omega_0 t) - \mathrm{Im}(c)\sin(\omega_0 t)$$

$$= \frac{K_0}{m}\frac{\omega_0^2 - \omega_0^2}{(\omega_0^2-\omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega_0^2}\cos(\omega_0 t) + \frac{K_0}{m}\frac{2\delta\omega_0}{(\omega_0^2-\omega_0^2)^2+4\delta^2\omega_0^2}\sin(\omega_0 t)$$

$$= \frac{K_0}{2\delta\omega_0 m}\sin(\omega_0 t)$$