

12.1. Partielle Integration

Wir schreiben

$$\begin{aligned}\int \cos^2(x) dx &= \int \cos(x) \cos(x) dx = \sin(x) \cos(x) + \int \sin^2(x) dx + C \\ &= \sin(x) \cos(x) + \int (1 - \cos^2(x)) dx + C \\ &= \sin(x) \cos(x) + x - \int \cos^2(x) dx + C.\end{aligned}$$

Definieren wir nun

$$K := \int \cos^2(x) dx$$

erhalten wir die Gleichung

$$2K = \sin(x) \cos(x) + x + C.$$

Lösen wir das nach K auf, erhalten wir also

$$K = \int \cos^2(x) dx = \frac{1}{2}(\sin(x) \cos(x) + x) + \tilde{C}.$$

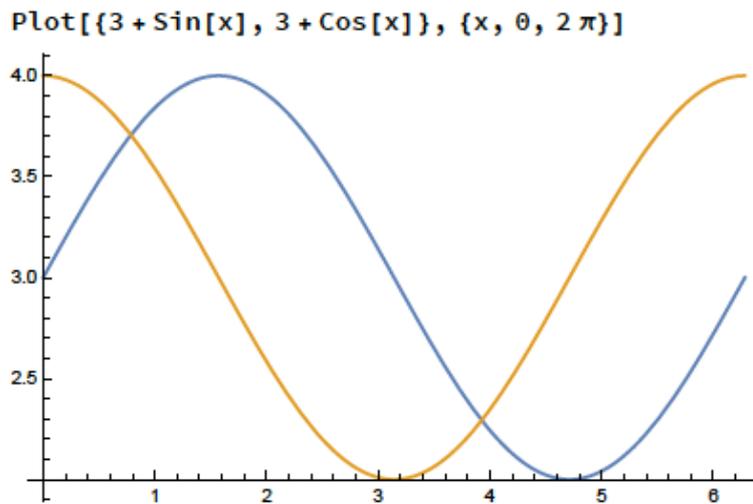
12.2. Flächeninhalt

Zuerst muss man bestimmen, wo $K_1(x) \geq K_2(x)$ bzw. $K_2(x) \geq K_1(x)$ gilt. Äquivalent dazu fragt man sich, wo $\sin x \geq \cos x$ bzw. $\cos x \geq \sin x$ ist. Man erhält:

$$\sin x \geq \cos x \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right],$$

$$\cos x \geq \sin x \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi \right].$$

Dies entspricht den drei Regionen im Bild, welche von gelb, blau, der y-Achse und der vertikalen unsichtbaren Geraden $\{x = 2\pi\}$ eingeschlossen werden:



Deshalb folgt

$$\begin{aligned}
 F &= \int_0^{\pi/4} (3 + \cos x - 3 - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (3 + \sin x - 3 - \cos x) dx + \\
 &+ \int_{5\pi/4}^{2\pi} (3 + \cos x - 3 - \sin x) dx \\
 &= (\cos x + \sin x)|_0^{\pi/4} - (\cos x + \sin x)|_{\pi/4}^{5\pi/4} + (\cos x + \sin x)|_{5\pi/4}^{2\pi} = \\
 &= 4\sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

12.3. Stammfunktion

Wir setzen $t = \sqrt{x}$ und bekommen $x = t^2$ und $dx = 2t dt$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sqrt{x} + 1} dx &= 2 \left(\int \frac{t}{t + 1} dt \right)_{t=\sqrt{x}} = 2 \left(\int dt - \int \frac{1}{t + 1} dt \right)_{t=\sqrt{x}} \\
 &= 2(t - \log |t + 1|)_{t=\sqrt{x}} + C = 2(\sqrt{x} - \log(\sqrt{x} + 1)) + C.
 \end{aligned}$$

Wir setzen die Bedingung

$$(2\sqrt{x} - 2\log(\sqrt{x} + 1) + C)_{x=0} = 1$$

ein und erhalten somit $C = 1$. Es folgt

$$K(x) = 2\sqrt{x} - 2\log(\sqrt{x} + 1) + 1.$$

12.4. Unbestimmte Integrale

(a) Wir erhalten mit zweifacher partieller Integration

$$\begin{aligned}\int \sin^2(t)e^{-t} dt &= -\sin^2(t)e^{-t} + \int 2\cos(t)\sin(t)e^{-t} dt \\ &= -\sin^2(t)e^{-t} - 2\cos(t)\sin(t)e^{-t} + \int (-2\sin^2(t) + 2\cos^2(t))e^{-t} dt\end{aligned}$$

Wenn wir auf beiden Seiten $4 \int \sin^2(t)e^{-t} dt$ addieren und die trigonometrische Identität $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ benutzen, folgt

$$\begin{aligned}5 \int \sin^2(t)e^{-t} dt &= -\sin^2(t)e^{-t} - 2\cos(t)\sin(t)e^{-t} + \int 2e^{-t} dt \\ &= -\sin^2(t)e^{-t} - 2\cos(t)\sin(t)e^{-t} - 2e^{-t}\end{aligned}$$

und somit

$$\int \sin^2(t)e^{-t} dt = -\frac{1}{5} (\sin^2(t) + 2\cos(t)\sin(t) + 2) e^{-t} + C$$

(b) Wir erhalten mit zweifacher partieller Integration

$$\begin{aligned}\int \sinh(t)\cos(t) dt &= \cosh(t)\cos(t) + \int \cosh(t)\sin(t) dt \\ &= \cosh(t)\cos(t) + \sinh(t)\sin(t) - \int \sinh(t)\cos(t) dt\end{aligned}$$

Das gesuchte Integral taucht auf beiden Seiten der Gleichung auf und wir können danach auflösen. Damit erhalten wir

$$\int \sinh(t)\cos(t) dt = \frac{1}{2} (\cosh(t)\cos(t) + \sinh(t)\sin(t)) + C.$$

(c) Beachte, dass der Integrand nur für $t \in (0, 1)$ wohldefiniert ist. Es macht also Sinn die Substitution $u^2 = t$ zu betrachten. Dann gilt $dt = 2u du$ und mit der Substitutionsregel folgt

$$\int \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{t-t}} dt = \int \frac{\sqrt{1-u^2}}{u-u^2} \cdot 2u du = 2 \int \frac{\sqrt{1-u^2}}{1-u} du$$

Wir formen den Integranden weiter um zu

$$\frac{\sqrt{1-u^2}}{1-u} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{1-u^2}{1-u} = \frac{1+u}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Für die verbleibenden Ausdrücke können wir die Stammfunktionen direkt angeben. (Beim zweiten Ausdruck könnte man alternativ auch ähnlich wie in Teil (d) weiter substituieren, wenn man die Stammfunktion nicht direkt sieht.) Wir erhalten

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{t-t}} dt &= 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du + 2 \int \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} du = 2 \arcsin(u) - 2\sqrt{1-u^2} \\ &= 2 \arcsin(\sqrt{t}) - 2\sqrt{1-t} + C\end{aligned}$$

12.5. Längenberechnung

(a) Es gilt $\dot{v}(t) = (-2\pi \sin t, 2\pi \cos t, 1)$ und damit $|\dot{v}(t)| = \sqrt{(2\pi)^2 \sin^2 t + (2\pi)^2 \cos^2 t + 1} = \sqrt{(2\pi)^2 + 1}$. Da dies keine t -Abhängigkeit mehr hat, ist die Länge von v einfach

$$L(v) = \int_0^1 \sqrt{(2\pi)^2 + 1} dt = \sqrt{(2\pi)^2 + 1}.$$

(b) Es gilt $\dot{v}(t) = (1, \dot{f}(t))$ und damit $|\dot{v}(t)| = \sqrt{1 + \dot{f}(t)^2}$, also

$$L(v) = \int_a^b \sqrt{1 + \dot{f}(t)^2} dt.$$

Aufgabe 4

Wir zeigen, dass

$$\int_a^b \frac{f(x)}{f(a+b-x)+f(x)} dx = \frac{b-a}{2}$$

Beachte:

$$\int_a^b \frac{f(a+b-x)}{f(a+b-x)+f(x)} dx = \int_b^a \frac{f(y)}{f(y)+f(a+b-y)} (-dy)$$

$y = a+b-x \Leftrightarrow x = a+b-y$
 $dy = -dx$

$$= \int_a^b \frac{f(y)}{f(a+b-y)+f(y)} dy,$$

also dasselbe wie das ursprüngliche Integral. Damit:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{f(x)}{f(a+b-x)+f(x)} dx &= \frac{1}{2} \int_a^b \frac{f(x)+f(a+b-x)}{f(a+b-x)+f(x)} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b 1 dx = \frac{b-a}{2}. \end{aligned}$$