Version A

Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^4+16}-4}{2x^4}.$$

(a) 0.

(b) $\frac{1}{2}$.

(c) $\frac{1}{16}$.

(d) ∞.

(e) Der Grenzwert existiert nicht.

Korrekt ist: c)

Begründung: Wir erweitern den Bruch mit $\frac{\sqrt{x^4+16}+4}{\sqrt{x^4+16}+4}$ und erhalten so

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^4+16}-4}{2x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^4+16}-4}{2x^4}\frac{\sqrt{x^4+16}+4}{\sqrt{x^4+16}+4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4+16-16}{2x^4(\sqrt{x^4+16}+4)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2(\sqrt{x^4+16}+4)} = \frac{1}{16}\end{aligned}$$

Version B

Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^4+9}-3}{3x^4}.$$

(a) 0.

(b) $\frac{1}{3}$.

(c) $\frac{1}{18}$.

(d) ∞.

(e) Der Grenzwert existiert nicht.

Korrekt ist: c)

Begründung: Wir erweitern den Bruch mit $\frac{\sqrt{x^4+9}+3}{\sqrt{x^4+9}+3}$ und erhalten so

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^4+9}-3}{3x^4} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^4+9}-3}{3x^4}\frac{\sqrt{x^4+9}+3}{\sqrt{x^4+9}+3} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4+9-9}{3x^4(\sqrt{x^4+9}+3)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{3(\sqrt{x^4+9}+3)} = \frac{1}{18}\end{aligned}$$

Version C

Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^4+25}-5}{2x^4}.$$

(a) 0.

(b) $\frac{1}{2}$.

(c) $\frac{1}{20}$.

(d) ∞.

(e) Der Grenzwert existiert nicht.

Korrekt ist: c)

Begründung: Wir erweitern den Bruch mit $\frac{\sqrt{x^4+25}+5}{\sqrt{x^4+25}+5}$ und erhalten so

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^4+25}-5}{2x^4} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^4+25}-5}{2x^4}\frac{\sqrt{x^4+25}+5}{\sqrt{x^4+25}+5} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4+25-25}{2x^4(\sqrt{x^4+25}+5)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2(\sqrt{x^4+25}+5)} = \frac{1}{20}\end{aligned}$$