Version A

Was ist der Konvergenzradius von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^\pi (\sqrt{5})^n}$$

(a) $\rho = 0$

(b) $\rho = 1$

(c) $\rho = \sqrt{5}$

(d) $\rho = \pi$

(e) $\rho = \infty$

Richtig ist: c)

Begründung: Mit dem Quotientenkriterium:

$$\begin{aligned}\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^\pi (\sqrt{5})^{n+1}}{n^\pi (\sqrt{5})^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^\pi \sqrt{5} = \sqrt{5}.\end{aligned}$$

Alternativ mit dem Wurzelkriterium:

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^\pi}\sqrt{5} = \sqrt{5},$$

da $\sqrt[n]{n^\pi} = \sqrt[n]{n}^\pi \to 1$.

Version B

Was ist der Konvergenzradius von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{2019} e^n}$$

(a) $\rho = 0$

(b) $\rho = 1$

(c) $\rho = e$

(d) $\rho = 2019$

(e) $\rho = \infty$

Richtig ist: c)

Begründung: Mit dem Quotientenkriterium:

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{2019}e^{n+1}}{n^{2019}e^n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2019} e = e.\end{aligned}$$

Alternativ mit dem Wurzelkriterium:

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^{2019}}e = e,$$

da $\sqrt[n]{n^{2019}} = \sqrt[n]{n}^{2019} \to 1$.

Version C

Was ist der Konvergenzradius von

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3(2019)^n}$$

(a) $\rho = 0$

(b) $\rho = 1$

(c) $\rho = 3$

(d) $\rho = 2019$

(e) $\rho = \infty$

Richtig ist: d)

Begründung: Mit dem Quotientenkriterium:

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3(2019)^{n+1}}{n^3(2019)^n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 2019 = 2019.\end{aligned}$$

Alternativ mit dem Wurzelkriterium:

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3}\, 2019 = 2019,$$

da $\sqrt[n]{n^3} = \sqrt[n]{n}^3 \to 1$.