Version A

Was ist die Taylorreihe (um $x_0 = 0$) der Funktion

$$f(x) := x^3 \frac{1}{(1-x)^2}\ ?$$

(a) $\sum_{k=3}^{\infty} kx^k$

(b) $\sum_{k=2}^{\infty}(k-2)x^k$

(c) $\sum_{k=3}^{\infty}(-1)^k(k-3)x^k$

(d) $\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)(k-2)x^k$

Korrekt ist: b)

Begründung: Mit der geometrischen Reihe können wir auch die Reihe von $\frac{1}{(1-x)^2}$ berechnen, indem wir komponentenweise ableiten. Wo die Reihen konvergieren, gilt dann:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^2} &= \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)' \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k.\end{aligned}$$

Multiplikation mit x^3 ergibt dann

$$x^3 \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^{k+3} = \sum_{k=2}^{\infty}(k-2)x^k.$$

Version B

Was ist die Taylorreihe (um $x_0 = 0$) der Funktion

$$f(x) := x^4 \frac{1}{(1-x)^2}\ ?$$

(a) $\sum_{k=3}^{\infty}(k-3)x^k$

(b) $\sum_{k=4}^{\infty}(-1)^k(k-4)x^k$

(c) $\sum_{k=4}^{\infty} kx^k$

(d) $\sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)(k-3)x^k$

Korrekt ist: a)

Begründung: Mit der geometrischen Reihe können wir auch die Reihe von $\frac{1}{(1-x)^2}$ berechnen, indem wir komponentenweise ableiten. Wo die Reihen konvergieren, gilt dann:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^2} &= \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)' \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k.\end{aligned}$$

Multiplikation mit x^4 ergibt dann

$$x^4 \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^{k+4} = \sum_{k=3}^{\infty}(k-3)x^k.$$

Version C

Was ist die Taylorreihe (um $x_0 = 0$) der Funktion

$$f(x) := x^5 \frac{1}{(1-x)^2}\,?$$

(a) $\sum_{k=4}^{\infty} k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)x^k$

(b) $\sum_{k=5}^{\infty}(-1)^k(k-5)x^k$

(c) $\sum_{k=5}^{\infty} kx^k$

(d) $\sum_{k=4}^{\infty}(k-4)x^k$

Korrekt ist: d)

Begründung: Mit der geometrischen Reihe können wir auch die Reihe von $\frac{1}{(1-x)^2}$ berechnen, indem wir komponentenweise ableiten. Wo die Reihen konvergieren, gilt dann:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^2} &= \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)' \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k.\end{aligned}$$

Multiplikation mit x^5 ergibt dann

$$x^5 \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^{k+5} = \sum_{k=4}^{\infty}(k-4)x^k.$$