1.1. Definitionsbereich

Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die der Ausdruck

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x-2|^3 - 2}{x^2 + x - \pi}\right)$$

definiert ist.

1.2. Mengen

Beschreiben Sie explizit (d.h. in so einfacher Form wie möglich) die Elemente der folgenden Mengen:

(a) $K_1 := \{(-1)^n n + \cos(n\pi) : n \in \mathbb{N}\}$,

(b) $K_2 := \{\cos\left[((-1)^n n + \cos(n\pi))\pi\right] : n \in \mathbb{N}\}$,

(c) $K_3 := \left\{\frac{4}{\pi^2} \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2} - \frac{2}{\pi} \frac{\cos(n\pi)}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

1.3. Funktionen

Gegeben seien Abbildungen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$. Zeigen Sie:

(a) Wenn f und g surjektiv sind, so ist es auch $g \circ f$.

(b) Wenn f und g injektiv sind, so ist es auch $g \circ f$.

(c) Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, so ist auch g surjektiv.

(d) Wenn $g \circ f$ injektiv ist, so ist auch f injektiv.

(e) Zeigen Sie, dass folgende Aussage nicht korrekt ist (d.h. finden Sie ein Gegenbeispiel): Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, so ist auch f surjektiv.

(f) Zeigen Sie, dass folgende Aussage nicht korrekt ist (d.h. finden Sie ein Gegenbeispiel): Wenn $g \circ f$ injektiv ist, so ist auch g injektiv.

1.4. Manipulation von Summen und Produkten

Zeigen Sie *ohne* Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

(a)

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0,$$

(b)

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_n}{a_0}, \qquad \text{(wobei } a_k \neq 0 \text{ für } k = 0, \dots, n).$$

(c)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{1+n},$$

Tipp: Benutzen Sie die Teilaufgabe (a)

(d)

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right) = 2 - \frac{1}{n+1}.$$

Tipp: Verwenden Sie die Teilaufgabe (b).