2.1. Konvergenz

Seien $f,\, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to\infty} g(x) = c, \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}.$$

(a) Angenommen $c > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x\to\infty} (f(x)g(x)) = -\infty.$$

(b) Angenommen $c = 0$. Geben Sie je ein Beispiel, wo

(i) $\lim_{x\to\infty}(f(x)g(x)) = \infty$.

(ii) $\lim_{x\to\infty}(f(x)g(x)) = 1$.

(iii) $\lim_{x\to\infty}(f(x)g(x)) = 0$.

2.2. Stetigkeit

Sei

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad u(x) := \begin{cases} e^{k\cos^2(x)}, & \text{falls } x < 0; \\ \sqrt{\pi} + \frac{x^{\frac{7}{9}}}{\alpha}, & \text{falls } 0 \le x < 1; \\ \frac{3e^{x^5}}{t} + \sqrt{\pi}, & \text{falls } x \ge 1. \end{cases}$$

Bestimmen Sie $k \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ und $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$, so dass u überall stetig ist.

2.3. Komplexe Zahlen I

Zeigen Sie, dass für alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ gilt:

(a) $z\bar{z} = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2$,

(b) $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$,

(c) $\bar{\bar{z}} = z$.

2.4. Komplexe Zahlen II

Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke in der Form $a + ib$ für $a, b \in \mathbb{R}$

(a) $(2+i)(2-i)$,

(b) $(1+3i)^2$,

(c) $\frac{1+i}{1-i}$.