3.1. Konvergenz von Folgen

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten und bestimmen Sie gegebenfalls den Grenzwert der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$:

(a) $a_n = \left(\frac{3+4i}{5}\right)^n$,

(b) $a_n = \sqrt[n]{3^n + 3^n + 5^n}$,

(c) $a_n = \frac{2^n - n^{2019}}{2^n + n^{2019}}$.

3.2. Konvergenzradius

Berechnen Sie den Konvergenzradius von

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$$

3.3. Konvergenz von Reihen

Die Funktionen $K_n(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, seien definiert durch

$$K_n(x) := \frac{nx}{1 + |nx|} .$$

(a) Man zeige, dass alle Funktionen K_n stetig sind. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$x \overset{K}{\longmapsto} K(x) := \lim_{n\to\infty} K_n(x) ,$$

definiert bzw. stetig?

(b) Betrachten Sie nun die Funktionenreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_n(x)$$

und finden Sie ihren Konvergenzbereich.

3.4. Komplexe Funktionen

Bestimmen Sie bei den folgenden Funktionen, ob sie injektiv sind. Skizzieren Sie dann ein paar Niveaumengen zu den Funktionen. Die Niveaumengen einer Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind die Mengen $f^{-1}(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = a\}$ für $a \in \mathbb{C}$, also die Menge aller Punkte, welche auf den Wert a abgebildet werden.

(a) $f_1\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C};\ z \mapsto z^2 - 1$,

(b) $f_2\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C};\ z \mapsto \mathrm{Re}(z)$,

(c) $f_3\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C};\ z \mapsto |z|$.