

5.1. Differentialgleichungen

Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung für die folgenden Differentialgleichungen

- (a) $y''(x) + 7y'(x) - 15y(x) = 0$,
- (b) $y^{(4)}(x) - y(x) = 0$,
- (c) $y^{(4)}(x) + 4y''(x) + 4y(x) = 0$,
- (d) $y^{(4)}(x) - 2y^{(3)}(x) + 5y''(x) = 0$.

5.2. Anfangswertproblem

Bestimmen Sie die Lösungen von $y''(x) + 7y'(x) - 15y(x) = 0$, welche $y'(0) = 1$ erfüllen.

5.3. Hermitesche Differentialgleichung

Man zeige, dass

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2}$$

ein Polynom n -ten Grades ist und die Hermitesche Differentialgleichung

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

löst.

Bemerkung: Um die Aufgabe zu lösen, kann es nützlich sein, diese Formel zu benutzen:

$$\left(\frac{d}{dx} \right)^{n+1} (xf(x)) = x \left(\frac{d}{dx} \right)^{n+1} f(x) + (n+1) \left(\frac{d}{dx} \right)^n f(x),$$

wobei f eine $(n+1)$ -mal differenzierbare Funktion ist.

5.4. Linearer Operator

Sei $V = \text{span}\{1, x, x^2\}$ der (Unter-)Vektorraum mit den Basiselementen 1 , x und x^2 .
Sie T der lineare Operator

$$T: V \rightarrow V \\ f \mapsto f'$$

welcher ein Element in V auf seine Ableitung schiebt. Was ist die Abbildungsmatrix von T bezüglich der gegebenen Basis?