6.1. System von Differentialgleichungen

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\begin{cases} y'' - y' - 6y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 5 \end{cases}$$

(a) Schreiben Sie diese Gleichung als System $\dot{x} = Ax$, wobei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit geeignetem Anfangswert $x(0)$.

(b) Verifizieren Sie, dass $x(t) = C_1 e^{3t}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + C_2 e^{-2t}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ die allgemeine Lösung dieses Systems ist.

(c) Bestimmen Sie C_1 und C_2.

(d) Wo können Sie nun die Lösung $y(t)$ der ursprünglichen Gleichung ablesen?

6.2. Riemannintegrierbarkeit

Zeigen Sie, dass jede monotone Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist. Zeigen Sie die Aussage zuerst für monoton steigende Funktionen. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Sei $\mathcal{Z} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Wir schreiben $I_k = [x_{k-1}, x_k]$. Die Obersumme ist

$$S_+(f, \mathcal{Z}) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{x\in I_k} f(x)(x_k - x_{k-1})$$

und die Untersumme ist

$$S_-(f, \mathcal{Z}) = \sum_{k=1}^{n} \inf_{x\in I_k} f(x)(x_k - x_{k-1}).$$

Vereinfachen Sie $S_+(f, \mathcal{Z})$ und $S_-(f, \mathcal{Z})$ für monoton steigende Funktionen (ohne sup und inf).

(b) Sei

$$\delta(\mathcal{Z}) = \max\{x_k - x_{k-1} | k = 1, \cdots n\}.$$

Zeigen Sie

$$0 \leq S_+(f, \mathcal{Z}) - S_-(f, \mathcal{Z}) \leq (f(b) - f(a))\delta(\mathcal{Z}).$$

(c) f ist Riemann-integrierbar, falls $S_-(f) := \sup_{\mathcal{Z}}\{S_-(f, \mathcal{Z})\}$ und $S_+(f) := \inf_{\mathcal{Z}}\{S_+(f, \mathcal{Z})\}$ übereinstimmen. Schliessen Sie die Riemann-integrierbarkeit für monoton steigende Funktionen.

6.3. Ableiten von Integralen bzgl. der oberen Grenze

(a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad f(x) = \int_0^{x^3} \cos^3(t)\, dt.$$

(b) Berechnen Sie $(f^{-1})'(0)$ für $f(x) = \displaystyle\int_\pi^x \cos(\cos(t))\, dt$.

6.4. Bestimmte Integrale

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\int_e^{e^2} \frac{\log^2 x}{x}\, dx$

(b) $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$

(c) $\int_0^{\pi/2} \sin(3x - \pi/4)\, dx$

(d) $\int_0^1 t^2 \cdot \cosh(2t)\, dt$