1.1. Summe

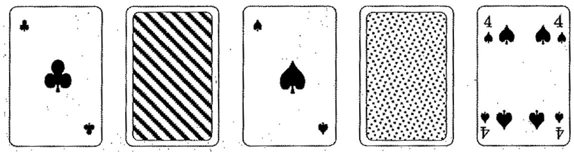
Berechnen Sie ohne Hilfe Ihres Taschenrechners die folgende Summe

$$\sum_{n=19}^{49} \left(\frac{2}{3}\right)^n .$$

Sie müssen keine Potenzen von $\frac{2}{3}$ explizit ausrechnen!

1.2. Spielkarten

Welche Spielkarten in der untenstehenden Figur muss man mindestens umdrehen, um mit Sicherheit die Frage „Sind alle Karten mit schraffierter Rückseite Asse?“ beantworten zu können?



1.3. Mengen

Seien U eine Menge und $A_i \subset U$, $i \in \mathbb{N}$, (Teil-)Mengen in U. Zeigen Sie, dass gilt

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c ,$$

wobei B^c das Komplement einer Menge B bezeichnet.

1.4. Binomischer Lehrsatz

Seien n und k ganze Zahlen. Erinnern Sie sich an die folgenden Definitionen:

$$\begin{aligned} 0! &:= 1 \\ n! &:= 1 \dots n, \quad n \geq 1 \\ \binom{n}{k} &:= \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad n \geq k \geq 0 \\ \binom{n}{k} &:= 0, \quad n \geq 0, k \leq -1. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $n \geq k \geq 0$ gilt

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion den binomischen Lehrsatz

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k},$$

wobei $x, y \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$.

1.5. Induktionsbeweis

Wo liegt der Fehler im folgenden Induktionsbeweis? Begründen Sie Ihre Antwort!

Behauptung *Alle Pferde haben dieselbe Farbe.*

Beweis Sei $P(n)$ die Aussageform, dass in jeder Ansammlung von n Pferden alle Pferde dieselbe Farbe haben. $P(1)$ ist offensichtlich wahr.

Im Induktionsschritt nehmen wir an, dass $P(k)$ wahr sei, und wollen $P(k+1)$ beweisen: Nehmen wir eine beliebige Gruppe von $k+1$ Pferden. Schicken wir eines weg, so bleiben k Pferde über, die also alle die gleiche Farbe haben. Holen wir das Pferd zurück und schicken ein anderes weg, so bleiben wieder k Pferde über, die dann auch alle die gleiche Farbe haben. Pferde ändern ihre Farbe nicht, also muss dies dieselbe Farbe wie die der ersten Gruppe sein. Somit haben alle $k+1$ Pferde die gleiche Farbe. Damit gilt $P(k)$ für alle $k \geq 1$.

Q.E.D.

1.6. Russelsches Paradoxon ★

Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{M} := \{A \mid A \text{ ist eine Menge}\}$$

keine Menge ist.

Hinweis: Angenommen $\mathcal{M}$ sei eine Menge. Betrachten Sie die Teilmenge

$$N := \{A \in \mathcal{M} \mid A \notin A\},$$

und entscheiden Sie, ob $N \in N$ gilt.

Die mit ★ versehenen Aufgaben sind Aufgaben, die entweder komplizierter sind oder nicht direkt mit dem prüfungsrelevanten Vorlesungsstoff zu tun haben. Die Aufgaben werden keine Musterlösung haben und sind als Denkanstoss gedacht.

1.7. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online bis Donnerstag, 26. September 2019 um 20:00 Uhr auf https://echo.ethz.ch/.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Hier ist eine Aussage über Quorge: “Ist ein Quorg glavul, so ropanzt er.” Formulieren wir die Negation dieser Aussage, so erhalten wir...

(i) Ist ein Quorg nicht glavul, so ropanzt er nicht.

(ii) Ropanzt er nicht, so ist ein Quorg glavul.

(iii) Nur ropanzende Quorge sind glavul.

(iv) Kein Quorg ist glavul.

(v) Ein Quorg existiert, der glavul ist, aber nicht ropanzt.

(b) Die Ungleichung $||x-2|-1| < 3$ für reelle Zahlen x ist äquivalent zu...

(i) $x < 3$

(ii) $|x| < 3$

(iii) $0 < x < 2$

(iv) $-2 < x < 6$

(v) $-3 < x < 6$

(c) Sei $f_n : X \to X$, $n \in \mathbb{N}$, eine Familie von Funktionen von einer Menge X in sich selbst. Ein Punkt $x \in X$ heisst Fixpunkt von f_n, falls $f_n(x) = x$ gilt. Schreibt man den Satz "Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau einen Fixpunkt $x \in X$ von f_n" mittels Quantoren, so erhält man...

(i) $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in X : f_n(x) = x$

(ii) $\exists! x \in X\ \forall n \in \mathbb{N} : f_n(x) = x$

(iii) $\forall x \in X\ \exists! n \in \mathbb{N} : f_n(x) = x$

(iv) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists! x \in X : f_n(x) = x$

(v) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x \in X : f_n(x) = x$

(d) Welche ist die Negation dieser Aussage: "Es regnet und ich habe keinen Regenschirm."?

(i) Es regnet nicht oder ich habe einen Regenschirm.

(ii) Es regnet nicht und ich habe keinen Regenschirm.

(iii) Ich habe einen Regenschirm.

(iv) Es regnet nicht, daher habe ich keinen Regenschirm.

(e) Welche ist die Kontraposition dieser Aussage: "Wenn es regnet und ich keinen Regenschirm habe, werde ich nass."?

(i) Wenn es nicht regnet, werde ich nicht nass und ich habe keinen Regenschirm.

(ii) Wenn ich nass werde, regnet es und ich habe keinen Regenschirm.

(iii) Wenn ich nicht nass werde, regnet es nicht oder ich habe einen Regenschirm.

(iv) Wenn ich einen Regenschirm habe, regnet es nicht und ich werde nicht nass.

(f) Welche ist die Negation dieser Aussage: "10 ist gerade und ist kleiner oder gleich 11." ?

(i) 10 ist nicht gerade.

(ii) 10 ist grösser als 11.

(iii) 10 ist nicht gerade oder ist grösser als 11.

(iv) 10 ist nicht gerade, deshalb ist es grösser als 11.