2.1. Abbildungen

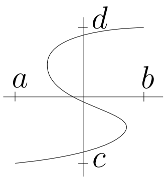
(a) Existieren injektive, surjektive oder bijektive Abbildungen

(i) von $\{0, 11, 111\}$ nach $\{0, 1\}$?

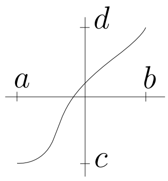
(ii) von $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 4x + 3 = 0\} \cup \{0, 1\}$ nach $\{n \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq n^3 \leq 100\}$?

(iii) von $\{2k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ in das Intervall $[0, 1] \subset \mathbb{R}$?

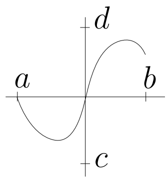
(b) Sind die folgenden Abbildungen Graphen einer Funktion $f : [a, b] \to [c, d]$? Ist diese Funktion, sofern sie existiert, surjektiv, injektiv oder bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.



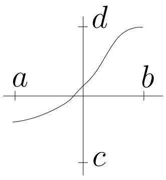
(i) Abb 1



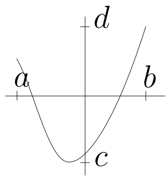
(ii) Abb 2



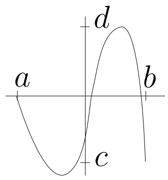
(iii) Abb 3



(iv) Abb 4



(v) Abb 5



(vi) Abb 6

2.2. Bild und Urbild

Seien X und Y Mengen und betrachten Sie eine Abbildung $f : X \to Y$. Für eine gegebene Teilmenge B von Y ist das *Urbild von B unter f* die Teilmenge $f^{-1}(B)$ von X, die durch die Formel

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$$

gegeben ist.

Für eine gegebene Teilmenge A von X kann man analog den Begriff des *Bilds von A unter f* definieren: sie ist die Teilmenge $f(A)$ von Y, die durch die Formel

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\}$$

geben ist.

Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

(a) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

(b) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

(c) $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$.

(d) Ist im Allgemeinen wahr, dass $f(A^c) = f(A)^c$ gilt? Falls ja, beweisen Sie die Aussage, falls nein, finden Sie ein Gegenbeispiel!

2.3. komplexe Zahlen

Beginnen Sie, sich mit komplexen Zahlen vertraut zu machen. Studieren Sie dazu das folgende Skript, für den Moment bis Kapitel 2: `https://wp-prd.let.ethz.ch/WP0-CIPRF9961/`

2.4. Definitionsbereich und Umkehrfunktion

Gegeben sei die Formel $f(x) := \sqrt[4]{3 - \sqrt{10 - \sqrt{x}}}$.

(a) Zeigen Sie, dass $f(x)$ auf $x \in [1, 100]$ sinnvoll definiert ist.

(b) Zeigen Sie, dass f streng monoton wachsend und deshalb injektiv ist auf $\operatorname{dom}(f)$. Bestimmen Sie den Bildbereich $\operatorname{im}(f) \subset \mathbb{R}$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Wurzelfunktion

$$[0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sqrt{x}$$

streng monoton wachsend ist.

(c) Finden Sie einen Ausdruck für die Umkehrfunktion $f^{-1}: \operatorname{im}(f) \to \operatorname{dom}(f)$.

2.5. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online bis Donnerstag, 3. Oktober 2019 um 20:00 Uhr.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Seien X, Y Mengen, $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ Abbildungen, so dass gilt:

$$g \circ f = \mathrm{id}_X.$$

Welche der folgenden Aussagen stimmen?

(i) f ist injektiv,

(ii) f ist surjektiv,

(iii) g ist injektiv,

(iv) g ist surjektiv,

(v) $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

(b) Eine reelle Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *gerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$

$$h(-x) = h(x)$$

gilt, und sie heisst *ungerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$

$$h(-x) = -h(x)$$

gilt. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gerade Funktion und sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(i) fg ist gerade.

(ii) fg ist ungerade.

(iii) fg^2 ist gerade.

(iv) $f + g$ ist gerade.

(c) Die Umkehrfunktion (Inverse) von $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$; $x \mapsto x^4$ ist...

(i) $x^{\frac{1}{4}}$.

(ii) existiert nicht.

(iii) $\frac{1}{4}x$.

(iv) x^{-4}.

(v) $-x^4$.

(d) Welche der folgenden Funktionen sind injektiv?

(i) $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [\,0, 1\,]$ mit $x \mapsto f(x) := \cos(x)$

(ii) $f : \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \to [\,-1, 1\,]$ mit $x \mapsto f(x) := \cos(x)$

(iii) $f : [-\pi, 0] \to [\,-1, 1\,]$ mit $x \mapsto f(x) := \cos(x)$

(iv) $f : [-\pi, 0] \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \cos(x)$

(e) Welche der folgenden Funktionen sind surjektiv?

(i) $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [\,0, 1\,]$ mit $x \mapsto f(x) := \cos(x)$

(ii) $f : \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \to [\,-1, 1\,]$ mit $x \mapsto f(x) := \cos(x)$

(iii) $f : [-\pi, 0] \to [\,-1, 1\,]$ mit $x \mapsto f(x) := \cos(x)$

(iv) $f : [-\pi, 0] \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \cos(x)$

(f) Welche der folgenden Funktionen sind bijektiv?

(i) $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [\,0, 1\,]$ mit $x \mapsto f(x) := \cos(x)$

(ii) $f : \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \to [\,-1, 1\,]$ mit $x \mapsto f(x) := \cos(x)$

(iii) $f : [-\pi, 0] \to [\,-1, 1\,]$ mit $x \mapsto f(x) := \cos(x)$

(iv) $f : [-\pi, 0] \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \cos(x)$