3.1. Komplexe Zahlen

Bearbeiten Sie das Skript über komplexe Zahlen bis zum dritten Kapitel.

3.2. Stetigkeit

(a) Zeigen Sie (mittels der Epsilon-Delta-Definition), dass die Funktion

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto x^2$$

stetig ist.

(b) Zeigen Sie: Falls $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig sind, so ist auch $\max(f, g)\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $\max(f, g)(x) = \max(f(x), g(x))$ stetig.

3.3. Lipschitzstetigkeit

Erinnerung: Eine auf einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heisst *Lipschitz stetig* mit Lipschitz-Konstante $C \geq 0$ falls

$$|f(x) - f(x')| \leq C|x - x'| \quad \text{für alle } x, x' \in D\,.$$

(a) Man zeige: Jede Lipschitz stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig.

(b) Zeigen Sie: Für $r > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ ist $f_r\colon [-r, r] \to \mathbb{R}$, $f_r(x) = x^n$ Lipschitz stetig und somit stetig.

(c) Folgern Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$, die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ stetig ist.

(d) Zeigen Sie, dass $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht Lipschitz stetig ist, falls $n \geq 2$.

3.4. Stetigkeit und Grenzwerte

Sei $b \in \mathbb{R}$. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch

$$g(x) := \begin{cases} \frac{x^2 - b^2}{x - b}, & \text{falls } x \neq b; \\ 0, & \text{falls } x = b. \end{cases}$$

(a) Existiert der Grenzwert $\lim_{x \to b} g(x)$?

(b) Ist $g(x)$ stetig im Punkt $x = b$?

3.5. Zwischenwertsatz

Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ stetig. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt hat, d.h. es existiert ein z in $[0,1]$ mit $f(z) = z$.

3.6. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online bis Donnerstag 10. Oktober 20:00.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Welche der folgenden Funktionen sind injektiv?

(i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) := xyz$.

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $t \mapsto f(t) := (\cos(t), \sin(t), t)$.

(iii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $(x,y) \mapsto f(x,y) := (x+y, x+y)$.

(iv) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $(x,y) \mapsto f(x,y) := (x+y, x-y)$.

(b) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12}$.

(i) existiert nicht,

(ii) ∞,

(iii) $\frac{5}{7}$,

(iv) 0.

(c) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$.

(i) $\frac{1}{6}$,

(ii) ∞,

(iii) -3,

(iv) 1

(d) Wie muss α gewählt werden, damit die folgende Funktion überall stetig ist:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \cos(x) & x > 0 \\ x^2 + x + \alpha & x \leq 0 \end{cases}$$

(i) Nur mit $\alpha = 0$ ist f stetig.

(ii) Nur mit $\alpha = 1$ ist f stetig.

(iii) f ist für jedes α stetig.

(iv) Egal wie α gewählt wird, f ist nie stetig.