

4.1. Komplexe Zahlen

Bearbeiten Sie das Skript über komplexe Zahlen bis zum vierten Kapitel.

4.2. Stückweise stetige Funktion

Sei

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) := \begin{cases} 3\sqrt{-x} + 1, & \text{falls } x < 0; \\ cx + d, & \text{falls } 0 \leq x \leq 1; \\ x^{10} - 1, & \text{falls } x > 1. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass Sie \mathbb{R} in endlich viele Intervalle unterteilen können, so dass f eingeschränkt auf ein einzelnes Intervall stetig ist.

(b) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{R}$, so dass f überall stetig ist.

4.3. Grenzwerte

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x^2 - \pi x + 3}{x^2 + \pi^2},$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 19x - 20}{|x-1| + (x-1)\sqrt{x}},$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \{ \pi \cos (\sin(x)) \},$

(d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \log \left(e^2 + \sqrt{|x|} + e - \sqrt{-x} \right),$

(e) $\lim_{x \rightarrow 100} (x - 100) \sin \left(\frac{1}{x-100} \right).$

4.4. Konvergenz

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heisst *Nullfolge*, falls $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Zeigen Sie, dass jede Nullfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0$, die Gleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + a_n} - 1}{a_n} = \frac{1}{2}$$

erfüllt.

4.5. Arithmetisches Mittel

(a) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a . Beweisen Sie, dass die Folge der arithmetischen Mittel

$$s_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

ebenfalls gegen a konvergiert.

(b) Geben Sie ein Beispiel einer divergenten Folge, deren arithmetisches Mittel konvergiert.

4.6. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online bis Donnerstag 17. Oktober 20:00.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 8x + 12}{|x - 2| + |x^2 - 4|}$.

(i) existiert nicht,

(ii) ∞ ,

(iii) $-\frac{4}{5}$,

(iv) 0.

(b) Die Asymptote(n) der Funktion $f(x) := \frac{x^3 + 2}{e^x + x^2}$ ist / sind...

(i) Die Gerade $y = x$ für $x \rightarrow -\infty$ und die horizontale Gerade bei $y = 0$ für $x \rightarrow \infty$,

(ii) Nur die Gerade $y = x$ für $x \rightarrow -\infty$,

(iii) Nur die Gerade $y = x$ für $x \rightarrow \infty$

(iv) Die Funktion $f(x)$ besitzt keine Asymptoten.

- (c) Die Asymptote(n) der Funktion $f(x) := \frac{3x+5x^2}{x-4}$ ist / sind...
- (i)** Die Funktion $f(x)$ besitzt keine Asymptoten,
- (ii)** Die Gerade $y = 5x + 23$ für $x \rightarrow \pm\infty$ und die vertikale Gerade bei $x = 4$,
- (iii)** Die Gerade $y = 5x$ für $x \rightarrow \pm\infty$ und die vertikale Gerade bei $x = 3$,
- (iv)** Nur die Gerade $y = 5x$ für $x \rightarrow -\infty$.
- (d) Der Grenzwert von $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{x} + \frac{x-1}{x} \right)$ ist...
- (i)** ∞ ,
- (ii)** 0,
- (iii)** 1,
- (iv)** 2,
- (v)** Existiert nicht.