5.1. sup, inf, max, min

(a) Entscheiden Sie, ob $A = \{\frac{2}{k} \mid k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ Infimum, Supremum, Minimum oder Maximum hat und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

(b) Sei A eine nicht leere Teilmenge von $\mathbb{R}$. Beweisen Sie die folgenden Aussage: Ist A noch oben beschränkt, so ist $-A = \{-x \,|\, x \in A\}$ nach unten beschränkt und $\inf(-A) = -\sup(A)$.

(c) Sei A eine nicht leere Teilmenge von $\mathbb{R}$. Beweisen Sie die folgenden Aussage: Ist $\inf(A) > 0$, so ist $A^{-1} = \{x^{-1} \,|\, x \in A\}$ nach oben beschränkt und $\sup(A^{-1}) = (\inf A)^{-1}$.

5.2. Grenzwerte

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten und bestimmen Sie gegebenfalls den Grenzwert der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$:

(a) $a_n = \frac{n^2+5n}{3n^2-2}$,

(b) $a_n = n(-1)^n$,

(c) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$,

(d) $a_n = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$, wobei $k \in \mathbb{N}$ fix sei,

(e) $a_n = \left(\frac{1+i}{4}\right)^n$,

(f) $a_n = \left(\frac{n^2+5n}{3n^2-2}\right)^n$.

5.3. Konvergenz von Reihen

Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz oder Divergenz:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$,

`Hinweis:` Benutzen Sie die Bernoullische-Ungleichung: Sei $x \geq -1$. Dann gilt

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$,

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n}$.

5.4. Konvergenzradius

Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ der folgenden Potenzreihen:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$,

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)^4}\, x^n$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln(7n))^n x^n$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\pi^n}$,

(e) $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ fix sei.

5.5. Umordnungen der alternierenden harmonischen Reihe ★

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k = (-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ (die alternierende harmonische Reihe). Sei r eine reelle Zahl. Zeigen Sie, es existiert eine Umordnung $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ von $(a_k)_{k=1}^{\infty}$, so dass $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = r$. Hier heisst $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ Umordnung, falls $b_k = a_{f(k)}$ für eine Bijektion $f\colon \mathbb{N}\setminus\{0\} \to \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

Allgemein gilt:

Falls $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, aber nicht absolut konvergiert, so lässt sich a_k umordnen, so dass die entstehend Reihe gegen jedes vorher gewählte reele r konvergiert oder auch divergiert (mit uneigentlichen Grenzwerten ∞ oder $-\infty$ oder auch ohne uneigentlichen Grenzwert).

5.6. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online bis Donnerstag 24. Oktober 20:00.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$ ist...

(i) existiert nicht,

(ii) 1,

(iii) ∞,

(iv) $\frac{1}{2}$,

(v) 0.

(b) Welche der folgenden Aussagen treffen auf die Menge

$$A = \left\{ \frac{|x|}{1+|x|} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

zu?

(i) 1 ist das Supremum von A.

(ii) 1 ist das Maximum von A.

(iii) 0 ist das Infimum von A.

(iv) 0 ist das Minimum von A.

(c) Welche der folgenden Aussagen treffen auf die Menge

$$B = \left\{ \frac{x}{1+x} : x > -1 \right\};$$

zu?

(i) 1 ist das Supremum von B.

(ii) B hat kein Maximum.

(iii) $-\infty$ ist das Infimum von B.

(iv) ∞ ist das Infimum von B.

(d) Sei $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ eine Folge und $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ die dazugehörige Reihe und $s_n :\, = \sum_{k=0}^{n} a_k$ die Partialsummen. Welche der folgenden Begründungen für Aussagen ist logisch korrekt?

(i) Es gibt unendlich viele a_k, die alle strikt grösser als Null sind. Daher divergiert die Reihe.

(ii) Die Folge (a_k) konvergiert gegen Null. Daher konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

(iii) Die Folge (s_n) der Partialsummen der Reihe ist monoton. Daher konvergiert die Reihe.

(iv) Alle Glieder a_k der Reihe sind positiv und die Reihe konvergiert. Daher konvergiert die Reihe absolut.