6.1. Konvergenz

(a) Beweisen Sie die partielle Summationsregel

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)b_k = a_{n+1}b_{n+1} - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}(b_{k+1}-b_k).$$

(b) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für welche die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}.$$

Hinweis: Den Konvergenzradius haben Sie in Serie 5 bereits berechnet. Der schwierige Fall ist nun $|z| = 1$: Für $z = 1$ erhält man die bekannte harmonische Reihe. Für $z \neq 1$ können Sie Teil (a) mit $a_k = 1 + z + \cdots z^{k-1} = \dfrac{1-z^k}{1-z}$ und $b_k = \dfrac{1}{k}$ verwenden.

6.2. Komplexe Zahlen

Bearbeiten Sie das Skript über komplexe Zahlen bis zum Ende.

6.3. Komplexe Gleichungen

Skizzieren Sie die Lösungsmengen von

(a) $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$

(b) $|z| = \operatorname{Re}(z) + 1$

(c) $\left|\frac{z}{z+1}\right| = 2$

(d) $|z-2| + |z+2| = 5$

(e) $\operatorname{Im}\left(\left|\frac{z-\mathbf{i}}{z+1}\right|\right) = 0$

(f) $\left|\frac{z-\mathbf{i}}{z+1}\right| = 1$

6.4. Allgemeine Potenzen

Für $a > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ ist a^z definiert durch

$$a^z := e^{z\log(a)}.$$

Zeigen Sie die folgenden Identitäten für $a, b > 0$, $x \in \mathbb{R}$, und $z, w \in \mathbb{C}$:

(a) $a^0 = 1$

(b) $a^1 = a$

(c) $a^{z+w} = a^z a^w$

(d) $(a^x)^z = a^{xz}$

(e) $(ab)^z = a^z b^z$

(f) $|a^z| = a^{\operatorname{Re}(z)}$

6.5. Trigonometrische Formeln

Zeigen Sie die Identitäten

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$
$$\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Hinweis: *Benutzen Sie die Eulersche Formel* $\exp(\boldsymbol{i}x)^k = \cos(kx) + \boldsymbol{i}\sin(kx)$ *für* $x \in \mathbb{R}$*, sowie:*

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

für $z \in \mathbb{C}$.

6.6. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online bis Donnerstag 31. Oktober 20:00.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Für die komplexe Zahl $z = (2 - i)^3$ gilt...

(i) $z = 8 + i$.

(ii) $z = 2 - 11i$.

(iii) $z = 8 - i$.

(iv) $z = 2 - 13i$.

(b) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^{327}$ ist...

(i) $327i$.

(ii) $-i$.

(iii) $(\frac{\sqrt{3}}{2})^{327}$.

(iv) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$.

(c) Welche der folgenden Aussagen gilt für reelle Zahlen $a, b > 0$?

(i) $\log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log(a)$.

(ii) $\log(ab) = \log(a)\log(b)$.

(iii) $\log(a+b) = \log(a)\log(b)$.

(d) Welche der folgenden Aussagen gilt für reelle Zahlen $a, b > 0$?

(i) $\exp\left(\frac{1}{a}\right) = -\exp(a)$.

(ii) $\exp(ab) = \exp(a)\exp(b)$.

(iii) $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$.