7.1. Inverse

Zeigen Sie, dass die Inverse der bijektiven Funktion

$$k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \sinh(x)$$

gegeben ist durch $k^{-1} \colon y \mapsto \log(y + \sqrt{y^2 + 1})$.

7.2. Ableitungen I

(a) Zeigen Sie unter Verwendung von Satz (2.15), dass gilt

$$\cos'(x) = -\sin(x),$$
$$\sin'(x) = \cos(x).$$

(b) Berechnen Sie mithilfe von Teil a) die Ableitung von $\tan(x)$.

7.3. Ableitungen II

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $\log(\sin x)$ für $x \in (0, \pi)$,

(b) a^x für $x \in \mathbb{R}$ und ein $a \in (0, \infty)$,

(c) x^x für $x \in (0, \infty)$,

(d) $9x^7 + 3x^{-5} - 3x^{-11}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(e) $\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}}$ für $x \in (4, \infty)$,

(f) $\log(\cosh x)$ für $x \in \mathbb{R}$,

(g) $\log(\log(\log x))$ für $x \in (e, \infty)$,

(h) $3^x x^3$ für $x \in \mathbb{R}$.

7.4. Ableitungen III

Sei $\alpha > -1$. Betrachten Sie die Funktion

$$f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \; x \mapsto |x|^{\alpha+1}\,.$$

Bestimmen Sie, für welche α die Ableitung von f_α an der Stelle 0 existiert.

7.5. Extremalstellen

Bestimmen Sie die globalen Extremalstellen der folgenden Funktionen:

(a) $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto x^3 - x^2 - 8x + 1,$

(b) $f : [-1, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{x+1}{x^2+1},$

(c) $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto (x-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$.

7.6. Online-Aufgabe

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online bis Donnerstag 7. November 20:00.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Welche der folgenden Ableitungen ist korrekt?

(i) $(\log(2x))' = 2\log(x)\frac{1}{x}$.

(ii) $(\exp(\sin(x))' = \cos(x)\exp(\sin(x))$.

(iii) $(\sqrt{\sin(x)})' = \frac{1}{2\sqrt{\cos(x)}}$.

(b) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(i) f ist stetig $\iff$ f ist differenzierbar.

(ii) f ist stetig $\implies$ f ist differenzierbar.

(iii) f ist stetig $\impliedby$ f ist differenzierbar.

(c) Welche der folgenden Funktionen besitzt kein Maximum?

(i) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

(ii) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{x^3-x}{x^2+2}$.

(iii) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{-x^4+x^3+x-1}{x^2+3}$.

(iv) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto e^{-x^2}\cos(x)$.

(v) $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto e^{-x^4}(x^2-1)$.

(d) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $a < c < b$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(i) $f'(c) = 0 \iff c$ ist eine Extremalstelle.

(ii) $f'(c) = 0 \implies c$ ist eine Extremalstelle.

(iii) $f'(c) = 0 \impliedby c$ ist eine Extremalstelle.