8.1. Differenzierbarkeit

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 0\,, \\ x^{n+1}, & \text{falls } x > 0\,. \end{cases}$$

Dabei ist n eine vorgegeben natürliche Zahl. Berechnen Sie $f^{(k)}$ für alle $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$, falls sie existiert. Ist f auf ganz $\mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar? (Das heisst, existieren die ersten n Ableitungen und sind alle stetig?)

8.2. Taylorreihen I

(a) Finden Sie die Taylorreihen von $\frac{1}{2+x}$, $\frac{1}{x-1}$ and $\frac{1}{x-3}$ in der Nähe von 0. Sie dürfen bekannte Taylorreihen verwenden.

(b) Finden Sie die Taylorreihe von $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$ in $x = 0$.

(c) Berechnen Sie den Anfang der Taylor-Reihe der Funktion

$$f : (-2, 2) \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \frac{\sin x}{2 + x}\,,$$

mit Entwicklungspunkt 0 bis einschliesslich des Gliedes 3. Ordnung.

8.3. Fehlerabschätzung

Wir wollen mit einem Fehler kleiner als $(100!)^{-1}$ mit Hilfe des Taylor-Polynoms $\sin(1)$ berechnen. Bis zu welcher Ordnung müssen wir das Taylor-Polynom berechnen?

8.4. Taylorreihen II

(a) Berechnen Sie die Taylorreihe der Funktion $g(x) = e^{x^2+4x}$ in $x = 0$.

(b) Berechnen Sie die Taylorreihe der Funktion: $f(x) = e^{x^2-4}$ in $x = 2$.

8.5. Logarithmus

Ziel dieser Aufgabe ist es den folgenden Grenzwert zu zeigen:

$$\log(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \tag{1}$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie per Induktion, dass für alle $n \geq 1$:

$$\frac{d^n}{dx^n} \log(1+x) = (-1)^{n-1}(n-1)! \frac{1}{(1+x)^n}.$$

(b) Folgern Sie, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

die Taylorreihe von $\log(1+x)$ um $x = 0$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass für $0 \leq x \leq 1$ und $0 \leq \xi \leq x$ die Abschätzung

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

gilt, wobei $f(x) = \log(1+x)$.

(d) Folgern Sie, dass für alle $0 \leq x \leq 1$

$$\left| \log(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

gilt.

(e) Folgern Sie daraus (1).

Bemerkung: Mit diesem Vorgehen zeigen Sie, dass für $0 \leq x \leq 1$ die Taylorreihe von $\log(1+x)$ tatsächlich $\log(1+x)$ darstellt. Für $x > 1$ gilt dies nicht mehr, dann divergiert die Reihe.

8.6. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online bis Donnerstag 14. November 20:00.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Welche der folgenden Funktionen stellt die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} kx^k$ dar?

(i) $(1-x)^{-1}$.

(ii) $(1-x)^{-2}$.

(iii) $(1+x)^{-2}$.

(iv) $x \cdot (1-x)^{-2}$.

(v) $x \cdot (1-x)^{-3}$.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft stetig differenzierbare Funktion. Welche der folgenden Aussagen ist im allgemeinen *nicht* richtig?

(i) f hat eine Taylorreihe bei $x_0 = 0$.

(ii) Der Konvergenzradius der Taylorreihe ist ≥ 0, aber nicht notwendig > 0.

(iii) Dort, wo die Taylorreihe konvergiert, stellt sie die Funktion f dar.

(iv) Wenn f durch eine Potenzreihe gegeben ist, so ist diese gleich der Taylorreihe.

(c) Welche Funktion wird durch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}+(-1)^k x^{2k+2}}{(2k+1)!}$ dargestellt?

(i) $\sin(x) + \sinh(x)$.

(ii) $x\sin(x) + \frac{1}{x}\sinh(x)$.

(iii) $x\sin(x) + x\sinh(x)$.

(iv) $x\cos(x) + \frac{1}{x}\cosh(x)$.