## 9.1. Newtonverfahren

Es sei $f(x) = \sin(x) - \frac{2x}{3}$.

**(a)** Geben Sie die Rekursionsbeziehung für die im Newtonschen Verfahren verwendete Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ an.

**(b)** (Zusatzaufgabe ★) Untersuchen Sie mit einem Mathematik-Tool (z.B. Mathematika, Wolframalpha) das Verhalten der Folgen für die Startwerte $x_0 = 0.904$, $x_0 = 0.905$ und $x_0 = 0.906$.

## 9.2. Lineare Differentialgleichung

**(a)** Bestimmen Sie die Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' + y' = 0.$$

**(b)** Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'' + y' &= 0, \\ y(1) &= 1, \\ y'(1) &= 2. \end{aligned}$$

## 9.3. Richtungsfeld einer Differentialgleichung erster Ordnung

Skizzieren Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung

$$y' = y(x+1)^2 + (y-2)$$

auf dem Gebiet $\Gamma = (-1.5, 1.5) \times (-1.5, 1, 5)$. (Zeichnen Sie die Steigungsgeraden bei den ganzzahligen Koordinaten.)

## 9.4. Differentialgleichungen

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$h' = -|h|^{\alpha}.$$

**(a)** Sei $\alpha = 2$. Zeigen Sie, dass es genau eine Lösung $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, welche $h(0) = 0$ erfüllt. (Also ist $h \equiv 0$ die einzige Lösung.)

**(b)** Sei $\alpha = \frac{1}{2}$. Finden Sie unendlich viele Lösungen $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(0) = 0$.
*Hinweis:* Eine Lösung ist $h(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{2}\right)^2 & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$.

### 9.5. Gedämpfte Schwingung

Betrachten Sie den folgenden Spezialfall einer gedämpften Schwingung:

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 0.$$

**(a)** Finden Sie die allgemeine Lösung dieser Gleichung.

**(b)** Sei $y(0) = 1$, wie können Sie $y'(0)$ wählen, so dass die Lösung einen Nulldurchgang hat? (D.h. so, dass es $t$ gibt mit $y(t) = 0$?)

### 9.6. Online-Aufgaben

**Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben:** Online bis Donnerstag 21. November 20:00.

**Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.**

**(a)** Wir betrachten die Differentialgleichung

$$u''(x) - 4u(x) = 0\,, \quad x \in (0,1).$$

Welches sind die Lösungen der Gleichung?

**(i)** $u \equiv 0$.

**(ii)** $u(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$, wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

**(iii)** $u(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$, wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

**(iv)** $u(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$, wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

**(b)** Wir betrachten die inhomogene Differentialgleichung

$$u''(x) - 4u(x) = -1\,, \quad x \in (0,1).$$

Was ist die allgemeine Lösung? (Wobei $u_h$ die homogene Lösung, also die Lösung der vorherigen Aufgabe sei.)

**(i)** $u_h(x) + \frac{1}{2}$

**(ii)** $u_h(x) + 4$.

**(iii)** $u_h(x) + x$.

**(iv)** $u_h(x) + \frac{1}{4}$.

**(c)** Wir betrachten das Problem

$$u''(x) - 4u(x) = -1\,,$$

mit $u(0) = 0$ und $u'(1) + u(1) = 0$. Was gilt?

**(i)** $u$ ist dadurch nicht eindeutig bestimmt.

**(i)** $u(x) = -\frac{1}{4}\frac{e^2+1}{3e^4+1}e^{2x} + \frac{1}{4}\frac{e^2-3e^4}{3e^4+1}e^{-2x} + \frac{1}{4}$.

**(iii)** $u(x) = \frac{1}{4}\frac{e^2+1}{3e^4+1}e^{2x} - \frac{1}{4}\frac{e^2-3e^4}{3e^4+1}e^{-2x} + \frac{1}{2}$.

**(iv)** Es gibt keine reelle Lösung.