10.1. Erstellen einer Differentialgleichung

(a) Finden Sie eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, so dass e^{-x}, e^{x}, $e^{-\pi x}$ und $e^{\pi x}$ Lösungen der Gleichung sind.

(b) Finden Sie eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, so dass e^{-10x} und $e^{3x}\cos(3x)$ Lösungen der Gleichung sind.

10.2. Homogene Differentialgleichungen

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen $y = y(x)$ der folgenden Differentialgleichungen:

(a) $y'' + y' - 2y = 0$;

(b) $y'' + 6y' + 13y = 0$;

(c) $y'' - 2y' + y = 0$;

(d) $y^{(4)} - 4y'' = 0$.

10.3. Differentialgleichungen mit Anfangsbedingungen

(a) Bestimmen Sie die allgemeine (reelle) Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0,$$

welche die Anfangsbedingungen

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \qquad y^{(3)}(0) = 1$$

erfüllt.

(b) Die Differentialgleichung

$$f'' + 2qf' + (q + q^2)f = 0$$

enthält einen (reellen) Parameter q. Für welche Werte von q bleiben **alle** Lösungen für $x \to \infty$ beschränkt ?

10.4. Inhomogene Differentialgleichung

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$2y'' + 3y' + 10y = \sin(2x) + 1.$$

10.5. Lineare Unabhängigkeit

Seien $\lambda_1, \dots \lambda_n$ paarweise verschiedene reelle Zahlen. Zeigen Sie:

$$e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$$

sind linear unabhängig in C^∞, dem Raum aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen.

10.6. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online bis Donnerstag 28. November 20:00.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Sei L der Differentialoperator

$$L(y) = y^{(4)} + 2y^{(2)}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(i) Der Raum der Lösungen von $L(y) = 0$ mit $y(0) = 0$ ist ein dreidimensionaler Vektorraum.

(ii) Der Raum der Lösungen von $L(y) = 0$ mit $y(0) = 1$ ist ein dreidimensionaler Vektorraum.

(iii) Der Raum der Lösungen von $L(y) = 0$ mit $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ ist ein dreidimensionaler Vektorraum.

(iv) Der Raum der Lösungen von $L(y) = 0$ mit $y'(0) = 0$ ist ein zweidimensionaler Vektorraum.