11.1. Inhomogene Differentialgleichungen I

Finden Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen.

(a) $y'' - 2y' = \cosh(x)$,

(b) $y'' - y = \cosh(x)$,

(c) ★ $y'' - y' = \cosh(x)$.

11.2. Inhomogene Differentialgleichung II

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung

$$y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = e^x.$$

11.3. Harmonischer Oszillator

Eine Masse m, welche mit einer Feder der Federkonstante f verbunden ist und entlang der x-Achse reibungsfrei schwingt, wird durch eine sinusförmige äussere Kraft mit Frequenz ν angeregt. Die Auslenkung der Masse genügt der Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \sin(\nu t),$$

wobei $\omega = \sqrt{\frac{f}{m}}$ die sogenannte Eigenfrequenz des Masse-Feder-Systems ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ soll sich die Masse an der Stelle $x = 0$ in Ruhe befinden: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

(a) Lösen Sie die Differentialgleichung für den Fall $\omega \neq \nu$ (keine Resonanz).

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung für den Fall $\omega = \nu$ (Resonanz).

(c) Skizzieren Sie die Ergebnisse aus **a)** und **b)** auf dem Zeitintervall $[0, 10\pi]$ für $\omega = 1$, $\nu = \frac{1}{2}$ bzw. $\omega = \nu = 1$. Was beobachten Sie?

11.4. Schwach Gedämpfter Harmonischer Oszillator

Wir betrachten $my'' + by' + fy = K(t)$, wobei $m, b, f > 0$ und $b^2 - 4fm < 0$. (Diese Differentialgleichung modelliert die Situation aus Aufgabe 3. mit Reibung aber auch einen elektrischen Schwingkreis, siehe Skript Seite 256).

(a) Drücken Sie die allgemeine (reelle) homogene Lösung der Gleichung unter Benutzung der Grössen

$$\delta := \frac{b}{2m}, \ \omega_0 := \sqrt{\frac{f}{m}}, \ \omega_* := \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

aus. (Die Grössen δ und ω_* heissen Dämpfungskonstante respektive Eigenfrequenz.)

(b) Zeigen, Sie, dass für jede Lösung y von $my'' + by' + fy = 0$ gilt, dass $y(t) \to 0$ für $t \to \infty$.

(c) Sei $K(t) = K_0 e^{i\omega t}$ für ein $\omega > 0$, $K_0 \in \mathbb{C}$. Finden Sie eine partikuläre Lösung für $my'' + by' + fy = K(t)$ der Form $ce^{i\omega t}$. Drücken Sie c in den Grössen ω_0, ω und δ aus.

(d) Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung für $t \to \infty$ gegen die partikuläre Lösung aus c) geht. Man nennt diese partikuläre Lösung auch die stationäre Lösung.

(e) $|c|$ heisst auch Resonanzfunktion der stationären Lösung. Für welches ω ist $|c|$ maximal?

(f) Sei $K_0 > 0$ reell. Beschreiben Sie die allg. reelle Lösung für $K(t) = \mathrm{Re}(K_0 e^{i\omega_0 t})$.

11.5. Online-Aufgaben

(a) Sei $x(t) \in \mathbb{R}^2$ und $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine Matrix. Betrachten Sie das System von Differentialgleichungen

$$\dot{x}(t) = Ax(t).$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(i) Falls $\det A = 0$, so hat die Gleichung nur die Lösung $x(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(ii) Falls v_1, v_2 Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sind mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$, so ist die allgemeine Lösung

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2.$$

(iii) Da A nur reelle Einträge hat, sind die Eigenwerte von A zwingendermassen reell.

(iv) A muss diagonalisierbar sein, damit eine nichttriviale Lösung existiert, d.h. eine Lösung $x(t) \not\equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Was ist die allgemeine Lösung des Systems

$$\dot{x}(t) = Ax(t)?$$

(i) $x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(ii) $x(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(iii) $x(t) = c_1 e^t A$.

(iv) $x(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.