

12.1. Partielle Integration

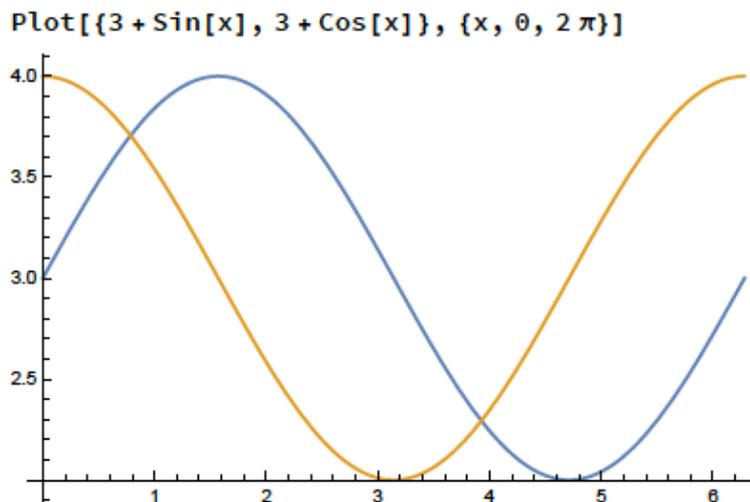
Berechnen Sie mit partieller Integration das Integral

$$\int \cos^2(x) dx.$$

12.2. Flächeninhalt

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Bereichs zwischen den Kurven

$$x = 0; \quad x = 2\pi;$$
$$K_1(x) = 3 + \sin x; \quad K_2(x) = 3 + \cos x.$$



12.3. Stammfunktion

Bestimmen Sie die Stammfunktion $K(x)$ der Funktion

$$a(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + 1},$$

so dass $K(0) = 1$ ist.

12.4. Unbestimmte Integrale

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

(a) $\int \sin^2(t)e^{-t} dt$,

(b) $\int \sinh(t) \cos(t) dt$

(c) $\int \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{t-t}} dt$

12.5. Längenberechnung

Sei $v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto (v_1(t), \dots, v_n(t))$ eine differenzierbare Abbildung (eine Kurve). Wir nennen $\dot{v}(t) = (\dot{v}_1(t), \dots, \dot{v}_n(t))$ den Tangentialvektor an v bei t und $ds = |\dot{v}(t)|dt$ das Linienelement. Wir definieren die Länge von v als

$$L(v) := \int_a^b ds = \int_a^b |\dot{v}(t)| dt.$$

(a) Sei $v(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), t)$, $t \in [0, 1]$. Berechnen Sie die Länge der Kurve und skizzieren Sie sie.

(b) Sei $v(t) = (t, f(t))$, $t \in [a, b]$ für f differenzierbar. Wie sieht die Formel für die Länge dieses Graphen aus?

12.6. ★ Lustiges Integral

Berechnen Sie

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1 + \cos(x))}{\log(1 + \sin(x)) + \log(1 + \cos(x))} dx.$$

12.7. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online bis Donnerstag 12. Dezember 20:00.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Den Hauptsatz der Infinitesimalrechnung für eine stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gibt es in verschiedenen Versionen. Welche ist keine davon?

(i) Falls F eine Stammfunktion von f ist, gilt $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

(ii) Die Funktion $t \mapsto \int_a^t f(x) dx$ ist eine Stammfunktion von f .

(iii) Es existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$.

- (iv)** Die Funktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ ist differenzierbar mit $F' = f$.
- (b)** Sei $f : [3, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \int_3^x \sin(t) dt$. Wie lautet die Gleichung der Ableitung von f ?
- (i)** $f'(x) = \cos(x) - \cos(3)$.
- (ii)** $f'(x) = \sin(x) - \sin(3)$.
- (iii)** $f'(x) = \cos(x)$.
- (iv)** $f'(x) = \sin(x)$.
- (v)** Keine der Gleichungen ist korrekt.
- (c)** Das Integral $\int_{-1}^1 |t| dt$ beträgt...
- (i)** 0.
- (ii)** 1.
- (iii)** 2.
- (iv)** 4.
- (v)** Keine der obigen Antworten ist richtig.
- (d)** Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

$$\int_1^2 \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = \dots$$

- (i)** $\int_0^{\log 2} \frac{t^2}{1+t^2} dt$.
- (ii)** $\int_e^{e^2} \frac{t}{1+t^2} dt$.
- (iii)** $\int_1^{\log 2} \frac{dt}{1+t^2} dt$.
- (iv)** $\int_e^{e^2} \frac{t^2}{1+t^2} dt$.
- (v)** $\int_e^{e^2} \frac{1}{1+t^2} dt$.