

Lösung - Serie 1

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. (★) Welche der Aussagen sind richtig?

(a) Eine divergente Folge ist nicht beschränkt.

Falsch. Z. B. ist $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt und divergent.

(b) Jede beschränkte Folge ist konvergent.

Falsch. Z.B. ist $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt und divergent.

✓ (c) Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Richtig. Dies folgt direkt aus der Definition der Konvergenz.

✓ (d) Eine nicht beschränkte Folge divergiert.

Richtig. Dies ist die Kontraposition der vorhergehenden Aussage. Sie folgt direkt aus der Definition der Konvergenz.

Bitte wenden!

2. (★) Gegeben sei die Folge $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ✓ (a) Die Folge ist monoton wachsend.
- ✓ (b) Die Folge ist beschränkt.
- (c) Die Folge ist eine Nullfolge.
- ✓ (d) Die Folge ist konvergent.
- ✓ (e) Der Limes der Folge ist 1.

Für alle $n \geq 1$ gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)(n+1)}{n(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} > 1.$$

Da alle Folgenglieder positiv sind, folgt $a_{n+1} > a_n$, d.h. die Folge ist monoton wachsend. Weiter gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

Somit ist beschränkt und konvergiert gegen 1. Also sind alle Aussagen *ausser* die dritte korrekt.

3. (★) Der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^3 - 1}{10n^3 + n + 21}$$

ist gleich ...

- ✓ (a) $\frac{1}{5}$.
- (b) 0.
- (c) ∞ .
- (d) $\frac{1}{32}$.
- (e) $-\frac{1}{21}$.

Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 1}{10n^3 + n + 21} \stackrel{\substack{= \\ \text{Zähler und Nenner} \\ \text{dividiert durch } n^3}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n^3}}{10 + \frac{1}{n^2} + \frac{21}{n^3}}.$$

Da die Summanden $\frac{1}{n^3}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{21}{n^3}$ jeweils eine Nullfolge bilden, wird der Grenzwert des Quotienten nach den Rechenregeln für Grenzwerte zu $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

Siehe nächstes Blatt!

4. (★★) Die Summe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots$$

ist gleich ...

- (a) $\frac{1}{2}$.
- ✓ (b) $\frac{2}{3}$.
- (c) 2.
- (d) $\frac{3}{2}$.
- (e) ∞ .

Die gegebene Summe definiert eine geometrische Reihe:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n.$$

Da $|q| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$, konvergiert die geometrische Reihe und hat den Grenzwert $\frac{1}{1-q} = \frac{2}{3}$.

5. (★★★★) Welche der untenstehenden Folgen divergieren?

(a) $a_n = \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}$.

Die Folge konvergiert gegen die Eulersche Zahl e .

✓ (b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Wird durch die harmonische Reihe minorisiert (das bedeutet die harmonische Reihe ist kleiner gleich) und ist deshalb divergent, weil die harmonische Reihe divergent ist. Die harmonische Reihe ist divergent wegen:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \frac{1}{n},$$

und deshalb $a_n \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + 1/n$, was jeden Wert übersteigt wenn n genügend gross ist.

✓ (c) $a_n = \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{n}$.

Harmonische Reihe und deshalb divergent.

✓ (d) $a_n = 1 + \dots + n$.

$a_n \geq n$ und deshalb divergent.

Bitte wenden!

6. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$. Vereinfachen Sie soweit wie möglich (ohne Taschenrechner!).

$$\text{a) } \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} + \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = \frac{(1 + \sqrt{2})^2 + (1 - \sqrt{2})^2}{(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})} = \frac{1 + 2\sqrt{2} + 2 + 1 - 2\sqrt{2} + 2}{1 - 2} = -6$$

$$\text{b) } \frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{(a + b)(a - b)}{a - b} = a + b.$$

$$\text{c) } \frac{a - b}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{ab(a - b)}{\frac{ab}{a} - \frac{ab}{b}} = \frac{ab(a - b)}{b - a} = -ab$$

$$\begin{aligned} \text{d) } & \frac{3a + a^2}{a - 8} - \frac{2a - 2}{8 + a} + (64 - a^2)^{-1} \cdot (a^3 + a^2 + 42a + 31 \cdot 2^4) \\ &= \frac{(-3a - a^2)(8 + a)}{(8 - a)(8 + a)} + \frac{(2 - 2a)(8 - a)}{(8 + a)(8 - a)} + \frac{a^3 + a^2 + 42a + 8 \cdot 62}{(8 - a)(8 + a)} \\ &= \frac{-a^3 - 9a^2 - 42a + 16}{64 - a^2} + \frac{a^3 + a^2 + 42a + 8 \cdot 62}{64 - a^2} = \frac{-8a^2 + 8 \cdot 64}{64 - a^2} = 8. \end{aligned}$$

e)

$$\ln(ab) + \ln\left(\frac{a^2}{b}\right) - 2\ln(ab) = \ln(a^3) + \ln((ab)^{-2}) = \ln\left(\frac{a}{b^2}\right)$$

f) Für welches positive $a \in \mathbb{R}$ gilt $\log_a 5 = \frac{1}{2}$? Durch Exponenzieren auf beiden Seiten erhalten wir $5 = a^{\frac{1}{2}}$. Durch Quadrieren erhalten wir $a = 25$.

g) Für welches $a \in \mathbb{R}$ gilt $7^{2a} = 2$? Es gilt

$$\begin{aligned} 7^{2a} &= 2 \\ \Leftrightarrow 2a &= \log_7(2) \\ \Leftrightarrow a &= \frac{1}{2} \log_7(2) = \log_7(\sqrt{2}). \end{aligned}$$

7. Gegeben sei die Funktion

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 - x^2 - 2x}.$$

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und alle Nullstellen von f . Für welche Werte von x ist die Funktion f positiv? Für welche negativ? Skizzieren Sie den Graph $\Gamma(f)$.

Hinweis: für den Graph können Sie z.B. das Bild ausgewählter Werte im Definitionsbereich berechnen und dann die Punkte miteinander verbinden. Was passiert mit der Funktion f in Umgebungen der Nullstellen des Nenners?

Lösung: f ist eine rationale Funktion und lässt sich wie folgt faktorisieren

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{(x + 3)(x - 1)}{x(x - 2)(x + 1)}.$$

Wie jede rationale Funktion, ist f überall in \mathbb{R} ausser in den Nullstellen des Nenners definiert. Somit ist der maximale Definitionsbereich von f die Menge $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 2\}$.

Siehe nächstes Blatt!

Die Nullstellen von f sind genau die Nullstellen des Zählers, nämlich -3 und 1 .

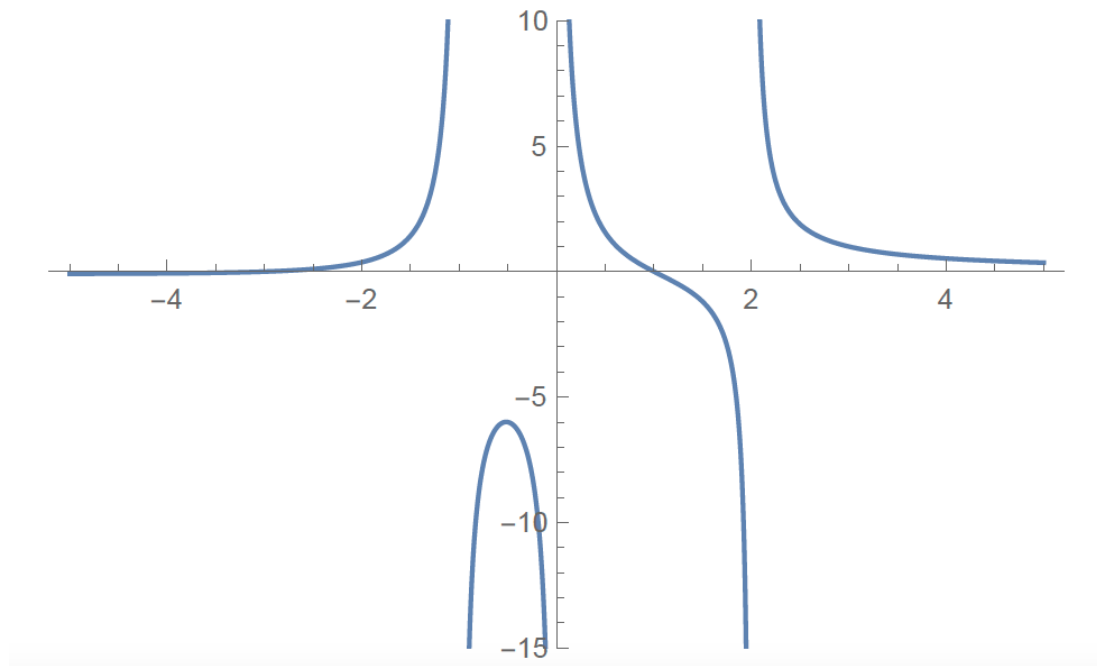
Nach Untersuchung der Vorzeichen der Faktoren im Zähler und im Nenner folgt, dass

$$P = (-3, -1) \cup (0, 1) \cup (2, \infty)$$

$$N = (-\infty, -3) \cup (-1, 0) \cup (1, 2),$$

wobei P die Menge, in der f positiv ist, und N die Menge, in der f negativ ist, bezeichnet.

Der Graph $\Gamma(f)$ ist:



8. Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen. Sind sie beschränkt? Sind sie monoton? Konvergieren sie? Wenn ja, was ist ihr Grenzwert?

a) $a_n = \cos \frac{\pi n}{3}$.

Offensichtlich ist (a_n) nach unten durch -1 und nach oben durch 1 beschränkt.

Die ersten zwei Folgenglieder sind

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

und

$$a_2 = -\frac{1}{2}.$$

Da \cos bekanntlich 2π -periodisch ist, gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+6} = a_n.$$

Deshalb kann die Folge nur konvergieren oder monoton sein, wenn sie konstant ist. Das ist sie aber nicht. Also ist sie nicht monoton und konvergiert auch nicht.

Bitte wenden!

b) $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$.

Es gilt

$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \dots + n) = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Die Folge $(\frac{1}{2n})_{n \geq 1}$ ist beschränkt (durch 1 von oben und 0 von unten), monoton fallend und konvergiert gegen 0. Daher ist $(a_n)_{n \geq 1}$ ebenfalls beschränkt, monoton fallend und konvergiert gegen $\frac{1}{2}$.

c) $a_n = \frac{3n^4 - 5n^2 + 2}{7n^4 - 4n^3}$.

Es gilt

$$a_n = \frac{3n^4 - 5n^2 + 2}{7n^4 - 4n^3} \cdot \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}} = \frac{3 - \frac{5}{n^2} + \frac{2}{n^4}}{7 - \frac{4}{n}}.$$

Da die Summanden $\frac{5}{n^2}, \frac{2}{n^4}, \frac{4}{n}$ jeweils eine Nullfolge bilden, konvergiert die Folge (a_n) gegen $\frac{3}{7}$. Insbesondere ist die Folge beschränkt. Sie ist nicht monoton, da $a_1 = 0 < \frac{3}{7} < \frac{200}{459} = a_3$.

d) $a_1 = 0, a_2 = 1, a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$ für $n \geq 3$.

Wir rechnen für $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n) - a_{n+1} = -\frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 (a_n - a_{n-1}) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^3 (a_{n-1} - a_{n-2}) \\ &\vdots \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n (a_2 - a_1) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

Beachte, dass für $n = 0$: $a_2 - a_1 = 1 = \left(-\frac{1}{2}\right)^0$, also es gilt

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1}) \\ &= a_1 + \sum_{k=0}^{n-2} (a_{k+2} - a_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-2} \left(-\frac{1}{2}\right)^k, \quad n \geq 3 \end{aligned}$$

konvergiert gegen $\frac{1}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}$ (geom. Reihe), also beschränkt, klar nicht monoton.

e) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Siehe nächstes Blatt!

Wir rechnen

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Die Folge ist offensichtlich monoton fallend, konvergiert gegen 0 und ist daher auch beschränkt.

f) $a_n = \sqrt{(n+1)n} - n.$

Wegen

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{(n+1)n} - n = (\sqrt{(n+1)n} - n) \frac{\sqrt{(n+1)n} + n}{\sqrt{(n+1)n} + n} \\ &= \frac{(n+1)n - n^2}{\sqrt{(n+1)n} + n} = \frac{n}{\sqrt{(n+1)n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \end{aligned}$$

ist die Folge monoton wachsend und konvergiert gegen $\frac{1}{2}$, daher ist sie auch beschränkt.

9. Fibonacci-Folge: Es sei die Folge (a_n) gegeben durch das rekursive Gesetz

$$a_0 = 1 \quad a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2.$$

Das Ziel dieser Aufgabe ist es den Grenzwert der Folge $b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, wobei $n \geq 1$, zu bestimmen.

a) Begründen Sie, wieso die Folge (a_n) monoton wachsend ist und wieso die Folge (b_n) beschränkt ist.

Lösung: Weil $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ und $a_{n-2} \geq 1$ für alle $n \geq 2$, folgt dass $a_n > a_{n-1}$ und deshalb ist die Folge (a_n) monoton wachsend. Es gilt

$$b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{a_{n-1}} = 1 + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} = 1 + \frac{1}{b_{n-1}} \quad (1)$$

für alle $n \geq 2$. Somit $b_n \geq 1$ für alle $n \geq 2$, weil jedes Folgenglied von (b_n) nicht-negativ ist. Weil $b_1 = 1$ folgt deshalb $b_n \geq 1$ für alle $n \geq 1$. Eine Konsequenz davon ist, dass $\frac{1}{b_{n-1}} \leq 1$ und deshalb folgt wegen (1), dass $b_n \leq 2$. Wir haben also gezeigt, dass $1 \leq b_n \leq 2$ und die Folge (b_n) ist somit beschränkt.

b) Es sei

$$c_n = a_n a_{n-3} - a_{n-1} a_{n-2} \quad \text{für } n \geq 3.$$

Zeigen Sie, dass $c_n = -c_{n-1}$ für alle $n \geq 4$.

Lösung: Wir berechnen

$$\begin{aligned} c_n &= a_n a_{n-3} - a_{n-1} a_{n-2} = (a_{n-1} + a_{n-2}) a_{n-3} - a_{n-1} (a_{n-3} + a_{n-4}) \\ &= a_{n-1} a_{n-3} + a_{n-2} a_{n-3} - a_{n-1} a_{n-3} - a_{n-1} a_{n-4} \\ &= a_{n-2} a_{n-3} - a_{n-1} a_{n-4} = -c_{n-1}, \end{aligned}$$

wie gewünscht.

Bitte wenden!

c) Begründen Sie, dass $c_n = (-1)^{n+1}$ gilt.

Lösung: Weil $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, erhalten wir $c_3 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1$ und deshalb folgt $c_4 = -1$, $c_5 = 1$, $c_6 = -1$ und so weiter.

d) Verwenden Sie jeweils Teilaufgabe c) um zu zeigen, dass die Folge (b_{2n}) , wobei $n \geq 1$, monoton fallend ist und dass die Folge (b_{2n+1}) , wobei $n \geq 1$, monoton wachsend ist.

Lösung: Weil $c_n = (-1)^{n+1}$, folgt $c_{2n} = (-1)^{2n+1} = -1$ für alle $n \geq 1$. Also

$$a_{2n}a_{2n-3} - a_{2n-1}a_{2n-2} = -1,$$

folglich $a_{2n}a_{2n-3} - a_{2n-1}a_{2n-2} \leq 0$ und somit $a_{2n}a_{2n-3} \leq a_{2n-1}a_{2n-2}$, was äquivalent zu

$$b_{2n} = \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} \leq \frac{a_{2(n-1)}}{a_{2(n-1)-1}} = b_{2(n-1)}$$

ist. Deshalb ist die Folge (b_{2n}) monoton fallend. Komplet analog lässt sich zeigen, dass die Folge (b_{2n-1}) monoton steigend ist.

e)* Begründen Sie unter Zuhilfenahme der vorangehenden Teilaufgabe, dass die Folge (b_n) gegen den goldenen Schnitt $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ konvergiert.

Lösung: Die Folge (b_{2n}) ist wegen Teilaufgabe a) beschränkt und wegen Teilaufgabe d) monoton fallend. Folglich ist die Folge (b_{2n}) konvergent. Es gilt

$$b_{2n} = 1 + \frac{1}{b_{2n-1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{b_{2(n-1)}}},$$

und somit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_{2n} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} b_{2(n-1)}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} b_{2n}}}.$$

Wir setzen $x := \lim_{n \rightarrow +\infty} b_{2n}$. Wir haben also gezeigt:

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}.$$

Auflösen nach x gibt

$$(x-1)\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$$

und somit $x + 1 - 1 - \frac{1}{x} = 1$, was äquivalent zu

$$x - \frac{1}{x} - 1 = 0$$

ist. Durch multiplizieren der obigen Gleichung mit x erhält man

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Mit der quadratischen Lösungsformel erhält man $x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. Weil alle Folgenglieder von (b_{2n}) positiv sind, folgt dass $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Wir haben also gezeigt, dass die Folge (b_{2n}) gegen den goldenen Schnitt $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ konvergiert. Mit genau der gleichen Rechnung lässt sich zeigen, dass auch die Folge (b_{2n-1}) gegen den goldenen Schnitt φ konvergiert.

Wir müssen nun noch zeigen, dass auch die Folge (b_n) gegen den goldenen Schnitt konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Weil die Folge (b_{2n}) konvergiert gibt es ein $N_1 \geq 1$, so dass für alle $n \geq N_1$ folgt $|b_{2n} - \varphi| < \varepsilon$. Weiterhin, weil die Folge (b_{2n+1}) konvergiert, gibt es ein $N_2 \geq 1$, so dass für alle $n \geq N_2$ folgt $|b_{2n-1} - \varphi| < \varepsilon$. Weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, haben wir gezeigt, dass die Folge (b_n) gegen den goldenen Schnitt konvergiert, wie behauptet.

Siehe nächstes Blatt!

