Lösung - Serie 11

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. (★★) Sei $f(x) = \int_\pi^x \cos(\cos t)\, dt$. Dann ist $(f^{-1})'(0)$ gegeben durch

(a) -1

√ (b) $\frac{1}{\cos(1)}$

(c) $\frac{\pi}{2}$

(d) $\frac{\pi}{\cos(1)}$

Nach dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung (anwendbar, da $t \mapsto \cos(\cos t)$ stetig ist) ist f differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = \cos(\cos x)$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $|\cos x| \leq 1 < \frac{\pi}{2}$ und daher ist $\cos(\cos x) > 0$. Also ist f strikt monoton wachsend und deshalb injektiv auf $\mathbb{R}$ (damit existiert die inverse Funktion und ist eindeutig).
Offensichtlich ist $f(\pi) = 0$ und daher ist $\pi = f^{-1}(0)$. Die Formel für die Ableitung einer Umkehrfunktion liefert deshalb:

$$\left(f^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(0)\right)} = \frac{1}{f'(\pi)} = \frac{1}{\cos(\cos\pi)} = \frac{1}{\cos(-1)} = \frac{1}{\cos 1}$$

2. (★✩) Es sei $a > 0$ eine Konstante. Was ist die Bogenlänge der *Kardioide*, gegeben in Polarkoordinaten durch $\rho(\phi) = 2a(1 + \cos\phi)$ für $\phi \in [0, 2\pi]$?

Hinweis: In Polarkoordinaten ist die Bogenlänge gegeben durch $\int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2} \mathrm{d}t$.

(a) $8a$

(b) $8\sqrt{2}a$

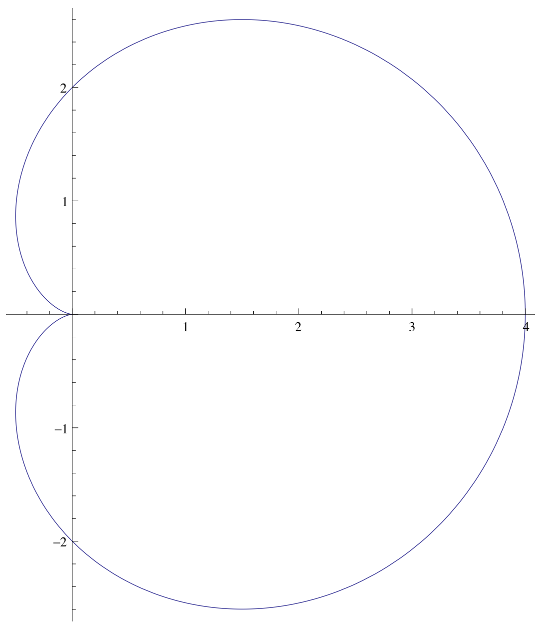
✓ (c) $16a$

(d) $16\sqrt{2}a$

Die Bogenlänge ist

$$
\begin{aligned}
s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2}\, d\phi = 2a \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + \cos\phi)^2 + \sin^2\phi}\, d\phi \\
&= 2a \int_0^{2\pi} \sqrt{2\,(1 + \cos\phi)}\, d\phi = 2a \int_0^{2\pi} \sqrt{4\cos^2\tfrac{\phi}{2}}\, d\phi = 4a \int_0^{2\pi} \left|\cos\tfrac{\phi}{2}\right|\, d\phi \\
&= 8a \int_0^{\pi} |\cos u|\; du = 8a \left(\int_0^{\pi/2} \cos u\, du - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos u\, du \right) = 8a(1 + 1) \\
&= 16a.
\end{aligned}
$$

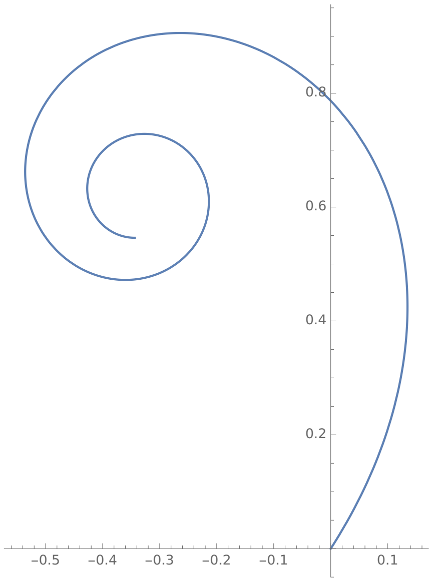
Skizze der Kardioide (mit $a = 1$):



Siehe nächstes Blatt!

3. (★★) Die Kurve K ist gegeben durch die Parameterdarstellung

$$t \mapsto (x(t),\, y(t)) = \left(\int_1^t \frac{\cos(u)}{u}\mathrm{d}u,\, \int_1^t \frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u\right), \qquad t \in [1, 4\pi).$$



Was ist die Bogenlänge von K vom Koordinatenursprung bis zum ersten Punkt mit vertikaler Tangente?

(a) $\frac{\pi}{2}$

(b) π

√ (c) $\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$

(d) $\ln(\pi)$

Zur Parametrisierung $\vec{r}(t) = (x(t),\, y(t))$ mit $t_A \leq t \leq t_B$ ist die Bogenlänge gegeben durch

$$s = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt,$$

wir müssen zunächst also t_A und t_B bestimmen. Da wir im Punkt $(0,\, 0)$ starten sollen, gilt offensichtlich $t_A = 1$.
Der Tangentialvektor $\dot{r}(t) = (\dot{x}(t),\, \dot{y}(t))$ an die Kurve K ist vertikal, wenn $\dot{x}(t) = 0$ und $\dot{y}(t) \neq 0$ gilt. Mit dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung muss also

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}\int_1^t \frac{\cos(u)}{u}du = \frac{\cos(t)}{t} = 0$$

und

$$\dot{y}(t) = \frac{d}{dt}\int_1^t \frac{\sin(u)}{u}du = \frac{\sin(t)}{t} \neq 0$$

Bitte wenden!

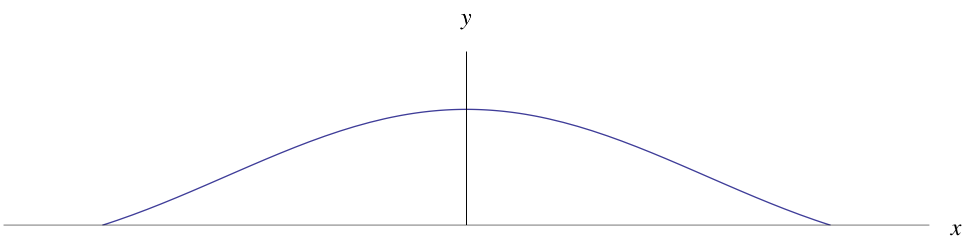
gelten. Der erste Punkt mit vertikaler Tangente ist somit bei $t = \frac{\pi}{2}$. Die gesuchte Bogenlänge ist also

$$\begin{aligned} s &= \int_1^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{\cos t}{t}\right)^2 + \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2} dt \\ &= \int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{t} = \Big[\ln|t|\Big]_1^{\frac{\pi}{2}} = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

4. (★⯨) Der Graph der Funktion $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0; \\ \frac{\sin x}{x} & \text{sonst} \end{cases}$$

wird um die y-Achse rotiert. Wie gross ist das Volumen des entstehenden Rotationskörpers?



(a) $\frac{2}{3}\pi^3$

(b) π^2

(c) 3π

√ (d) 4π

Wir zerlegen den Körper in dünne Hohlzylinder mit Innenradius x und Aussenradius $x + dx$. Ein solcher Hohlzylinder hat den Umfang $2\pi x$, die Höhe $\frac{\sin x}{x}$ und die Dicke dx, also das Volumen

$$dV = 2\pi x \frac{\sin x}{x}\, dx = 2\pi \sin x\, dx.$$

Das Gesamtvolumen ist somit

$$V = \int_0^{\pi} dV = 2\pi \int_0^{\pi} \sin x\, dx = 4\pi.$$

Siehe nächstes Blatt!

5. (★★) Berechnen Sie den Flächeninhalt, den die folgenden Kurven im Bereich $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ einschliessen.

a) $\rho(\varphi) = \sqrt{\varphi}$

b) $\rho(\varphi) = \frac{1}{1+\varphi}$

c) $\rho(\varphi) = |\sin(\varphi)|$

Lösung:

a) Wir berechnen

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho(\varphi)^2 \, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi}^2 \, d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\varphi^2\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{4}4\pi^2 = \pi^2. \end{aligned}$$

b) Wir berechnen

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho(\varphi)^2 \, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{1+\varphi}\right)^2 d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{1+\varphi}\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2+4\pi}. \end{aligned}$$

c) Wir berechnen

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho(\varphi)^2 \, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |\sin(\varphi)|^2 \, d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(\varphi)^2 \, d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4}\sin(2\varphi)\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

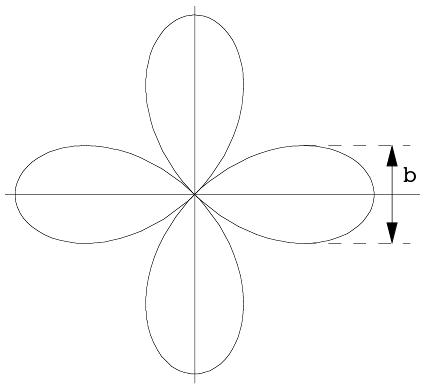
Hier haben wir benutzt, dass $\sin(\varphi)^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\varphi))$.

6. (★★½) Durch

$$\rho(\varphi) = a\,|\cos(2\varphi)|$$

mit $a > 0$ wird in Polarkoordinaten der Rand eines Kleeblattes parametrisiert.

Bitte wenden!



a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Kleeblattes.

b) Bestimmen Sie die Breite b des Kleeblattes.

Lösung:

a) Für die Fläche erhalten wir nach der bekannten Formel

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho(\varphi)^2\, d\varphi = \frac{1}{2}a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(2\varphi)\, d\varphi = \frac{a^2}{4}\int_0^{2\pi} (1+\cos(4\varphi))\, d\varphi \\ &= \frac{a^2}{4}\left[\varphi + \frac{1}{4}\sin(4\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = \frac{\pi a^2}{2}. \end{aligned}$$

b) Um die Breite zu bestimmen, benötigen wir die y-Koordinate desjenigen Punktes im ersten Quadranten, an dem die Tangente an der Kurve horizontal ist. Dazu bestimmen wir zunächst die kartesischen Komponenten der Kurve:

$$\begin{aligned} (x(\varphi), y(\varphi)) &= (\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi) \\ &= (a\cos(\varphi)|\cos(2\varphi)|, a\sin\varphi|\cos(2\varphi)|)\,. \end{aligned}$$

Aus der Skizze wird klar, dass wir einen Punkt mit $\varphi \in (0, \frac{\pi}{4}]$ suchen. Dort ist also $\cos(2\varphi) > 0$, und wir finden

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dy}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}\,(a\sin\varphi\cos(2\varphi)) = a\cos\varphi\cos(2\varphi) - 2a\sin\varphi\sin(2\varphi) \\ &= a\left[\cos\varphi(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) - 4\sin^2\varphi\cos\varphi\right] = a\cos\varphi\left(\cos^2\varphi - 5\sin^2\varphi\right) \\ &= a\cos\varphi\left(1 - 6\sin^2\varphi\right). \end{aligned}$$

Die einzige Lösung hiervon im Intervall $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$ ist

$$\varphi_0 = \arcsin\frac{1}{\sqrt{6}},$$

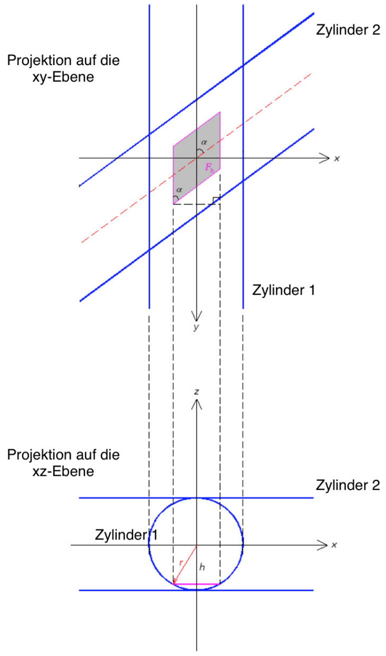
und die Breite ergibt sich zu

$$\begin{aligned} b &= 2y(\varphi_0) = 2a\sin\varphi_0\cos(2\varphi_0) = 2a\sin\varphi_0(1-2\sin^2\varphi_0) = \frac{2a}{\sqrt{6}}\left(1-\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{4a}{3\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

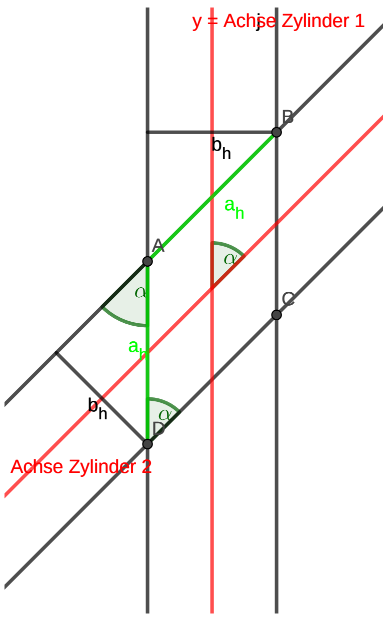
Siehe nächstes Blatt!

7. (★★★) Zwei gerade Kreiszylinder Z_1 und Z_2 mit gleichem Grundkreisradius r durchdringen einander derart, dass sich ihre Achsen schneiden und den Winkel α einschliessen. Berechnen Sie das Volumen des Körpers $Z_1 \cap Z_2$.

Hinweis: Zerschneiden Sie den Körper durch Ebenen, welche zu beiden Achsen parallel sind.



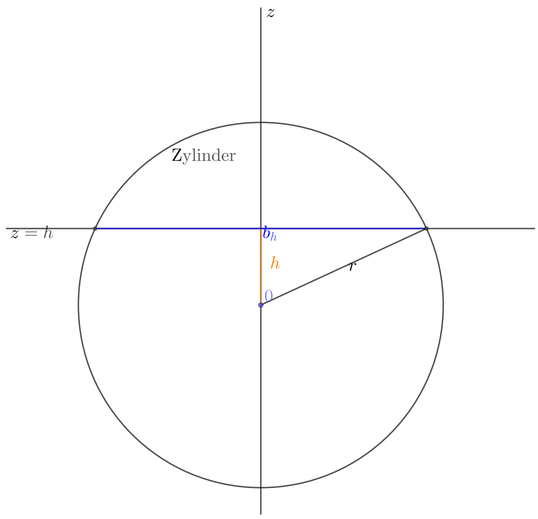
Lösung: Wir legen ein Koordinatensystem so, dass die Zylinderachsen in der xy-Ebene liegen, wobei eine von denen mit der y-Achse übereinstimmt. Aus dem folgenden Bild lässt sich herleiten, dass der Durchschnitt von $Z_1 \cap Z_2$ mit der Ebene $z = h$ $(-r \leq h \leq r)$ ein Rhombus ist:



Bitte wenden!

Sei a_h die Seitenlänge des Rhombus und b_h die Breite der Streifen, die durch $Z_i \cap \{z = h\}$ für $i \in \{1, 2\}$ gegeben sind. Es gilt $a_h = \frac{b_h}{\sin\alpha}$. Die Fläche des Rhombus ist gegeben durch $F_h = \int_{-\frac{b_h}{2}}^{\frac{b_h}{2}} a_h \, dx = b_h a_h = \frac{b_h^2}{\sin\alpha}$.

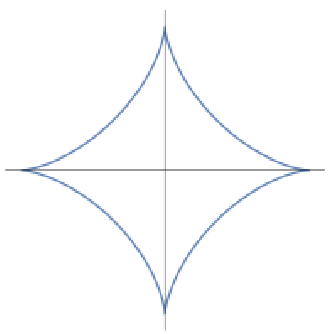
Zur Berechnung von b_h betrachten wir das folgende Bild, dass einen Zylinder geschnitten mit einer Ebene senkrecht zur Zylinderachse zeigt. Es gilt $\left(\frac{b_h}{2}\right)^2 + h^2 = r^2$, also $b_h = 2\sqrt{r^2 - h^2}$. Es folgt, dass $F_h = \frac{b_h^2}{\sin\alpha} = \frac{4(r^2-h^2)}{\sin\alpha}$.



Um das Volumen V von $Z_1 \cap Z_2$ zu bestimmen, integrieren wir entlang der z-Achse über die Fläche von $Z_1 \cap Z_2 \cap \{z = h\}$. Es gilt also

$$V = \int_{-r}^{r} F_h \, dh = \int_{-r}^{r} \frac{4}{\sin\alpha}(r^2 - h^2) \, dh = \frac{4}{\sin\alpha}(2r^3 - \frac{2}{3}r^3) = \frac{16}{3\sin\alpha} r^3.$$

8. (★★★) Es sei die *Astroide* durch die folgende Parameterdarstellung gegeben:



$$x(t) = a\cos^3 t$$
$$y(t) = a\sin^3 t, \qquad \text{für } 0 \le t \le 2\pi.$$

Siehe nächstes Blatt!

Dabei ist $a > 0$ eine feste Zahl. Berechnen Sei in Abhängigkeit von a:

a) die Bogenlänge der Astroide;

b) die Fläche des Astroidensterns;

c) das Volumen des Rotationskörpers, der erhalten wird, wenn die Astroide um die x-Achse gedreht wird;

Erinnerung: (*für Teilaufgabe b)*) Es sei

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $I_2 = \frac{\pi}{4}$ und die Rekursionsformel

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Es wurde auch die folgende Formel gezeigt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx.$$

Lösung:

a) die Bogenlänge der Astroide;

Für unsere Rechnungen nützen wir immer wieder die vorhandene Symmetrie aus; im ersten Quadranten läuft der Parameter t von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ und die gesamte Bogenlänge ist das Vierfache der Bogenlänge im ersten Quadranten, analog für die Fläche.
Mit $\dot{x}(t) = -3a\cos^2 t \sin t$ und $\dot{y}(t) = 3a \sin^2 t \cos t$ ergibt sich für die Bogenlänge der Astroide

$$\begin{aligned} s &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t}\, dt \\ &= 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\, dt = 12a\left[\tfrac{1}{2}\sin^2 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a. \end{aligned}$$

b) die Fläche des Astroidensterns;

Die Fläche des Astroidensterns ist

$$\begin{aligned} F &= 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t))\, dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3a^2(\cos^4 t \sin^2 t + \cos^2 t \sin^4 t))\, dt \\ &= 6a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 t(1-\cos^2 t) + (1-\sin^2 t)\sin^4 t)\, dt \\ &= 6a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t - \cos^6 t + \sin^4 t - \sin^6 t \, dt \end{aligned}$$

Wenn wir

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$$

schreiben, dann haben wir zusammen mit der Notation aus dem Hinweis

$$F = 6a^2(J_4 - J_6 + I_4 - I_6).$$

Bitte wenden!

Wir widmen uns nun dem Hinweis und zeigen, dass $I_n = J_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx \\
&\overset{u=x-\frac{\pi}{2}}{\underset{du=dx}{=}} \int_{u(0)}^{u(\pi/2)} \cos^n(u) du = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n(u) du \\
&\overset{(*)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(u) du = J_n,
\end{aligned}$$

wobei wir in $(*)$ ausgenutzt haben, dass der Kosinus eine gerade Funktion ist, d.h. $\cos(-x) = \cos(x)$.

Damit gilt nun

$$F = 12a^2(I_4 - I_6).$$

Verwenden wir die Rekursionsformel

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

zusammen mit dem Ergebnis $I_2 = \frac{\pi}{4}$ erhalten wir

$$I_4 = \frac{3}{16}\pi, \quad I_6 = \frac{15}{96}\pi.$$

Somit ergibt sich der Flächeninhalt zu

$$F = 12a^2 \left(\frac{3\pi}{16} - \frac{15\pi}{96}\right) = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

c) das Volumen des Rotationskörpers, der erhalten wird, wenn die Astroide um die x-Achse gedreht wird;

Der Schnitt des Körpers mit einer Ebene parallel zur (y, z)-Ebene ist ein Kreis.
Die implizite Darstellung der Kurve ist gegeben durch

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

wie man aus der Parameterdarstellung ablesen kann. Um den Radius des Schnittkreises zu berechnen, bestimmen wir lokal die explizite Darstellung zu $y(x) = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$, welche für $0 \leq x \leq a$ gilt und damit die Kurve im ersten Quadranten beschreibt. Die Fläche des Kreises ist $\pi \cdot y(x)^2$, also erhalten wir als Volumen

$$V = 2\int_0^a \pi y(x)^2 \, dx = 2\int_0^a \pi \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 \, dx = 2\pi a^2 \int_0^a \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^3 \, dx.$$

Nun substituieren wir $u = (\frac{x}{a})^{\frac{2}{3}}$, wir erhalten $x = au^{\frac{3}{2}}$ und $dx = \frac{3}{2}a\sqrt{u}du$ mit den Grenzen 0 und 1. Also gilt

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi a^2 \int_0^a \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^3 \, dx = 2\pi a^2 \cdot \tfrac{3}{2}a \int_0^1 (1-u)^3 \sqrt{u} \, du \\
&= 3\pi a^3 \int_0^1 (1 - 3u + 3u^2 - u^3) u^{\frac{1}{2}} \, du = 3\pi a^3 \int_0^1 u^{\frac{1}{2}} - 3u^{\frac{3}{2}} + 3u^{\frac{5}{2}} - u^{\frac{7}{2}} \, du \\
&= 3\pi a^3 \left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - \frac{6}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{6}{7}u^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{9}u^{\frac{9}{2}}\right]_0^1 = \frac{32}{105}\pi a^3.
\end{aligned}$$