Lösung - Serie 12

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. (★½) Wie gross ist die Oberfläche des Körpers, der durch Rotation der durch

$$y = \cos(x),\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

gegebenen Kurve um die x-Achse entsteht, ungefähr?

Hinweis: $\displaystyle\int \sqrt{1+u^2}\, du = \frac{\operatorname{Arsinh}(u) + u\sqrt{1+u^2}}{2} + C.$

√ (a) 14.424

(b) 19.961

(c) 28.847

Lösung:

Mit Hilfe der Parametrisierung

$$x(t) = t \quad , \quad y(t) = \cos(x(t)) = \cos t \quad , \quad t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

erhalten wir nach der allgemeinen Formel die Oberfläche

$$\begin{aligned}
O &= 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} y(t)\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \sqrt{1+\sin^2 t}\, dt \\
&= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1+u^2}\, du = 2\pi \left[\frac{1}{2}\left(\operatorname{arsinh} u + u\sqrt{u^2+1}\right)\right]_{u=-1}^{u=1} \\
&= \pi \left[\operatorname{arsinh}(1) - \operatorname{arsinh}(-1) + \sqrt{2} - \left(-\sqrt{2}\right)\right] = 2\pi\left(\operatorname{arsinh}(1) + \sqrt{2}\right) \\
&= 2\pi\left[\ln\left(1+\sqrt{1^2+1}\right) + \sqrt{2}\right] = 2\pi\left[\ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}\right] \approx 14.424.
\end{aligned}$$

Wir haben dabei $u = \sin t$ substituiert.

Bitte wenden!

2. (★★) Die Kurve K, gegeben in Parameterdarstellung durch

$$t \mapsto (x(t), y(t)) = e^{-t}\left(\cos(2t), \sin(2t)\right), \quad 0 \le t \le \pi/2,$$

rotiert um die x-Achse. Wie gross ist die dabei entstehende Oberfläche ungefähr?

(a) 2.317

✓ (b) 3.664

(c) 84.792

Es ist

$$\begin{aligned} O &= 2\pi \int_0^{\pi/2} y(t)\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,dt = 2\pi \int_0^{\pi/2} e^{-t}\sin(2t)\sqrt{5}e^{-t}\,dt \\ &= 2\pi\sqrt{5}\int_0^{\pi/2} e^{-2t}\sin(2t)dt = 2\sqrt{5}\pi\frac{e^{-2t}}{4+4}(-2\sin(2t) - 2\cos(2t))\Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2}\pi(e^{-\pi} + 1) \approx 3.664, \end{aligned}$$

wobei die Formel

$$\int e^{ax}\sin(bx)dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin(bx) - b\cos(bx)) + C \quad , \quad a, b, C \in \mathbb{R}$$

benutzt wurde. Sie lässt sich mittels partieller Integration herleiten.

3. (★) Liegt der Schwerpunkt eines rotationssymmetrischen Körpers immer auf dessen Rotationsachse?

✓ (a) Ja. Andernfalls würde der Schwerpunkt nach der Rotation nicht mehr derselbe sein – er ist aber eindeutig.

(b) Nein. Dies würde im Umkehrschluss bedeuten, dass sich alle Rotationsachsen eines Körpers in einem Punkt schneiden müssten, was nicht immer der Fall ist.

4. (★⯨) Wenn man das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty e^{-\sqrt{\ln(x)}}\,\mathrm{d}x$$

mit der passenden rationalen Funktion vergleicht, findet man heraus, dass dieses Integral...

(a) konvergiert.

√ (b) divergiert.

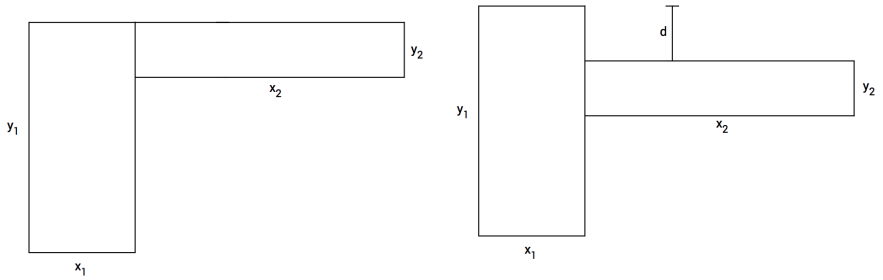
Es gilt

$$e^{-\sqrt{\ln(x)}} = \frac{1}{e^{\sqrt{\ln(x)}}} > \frac{1}{x},$$

da $x = e^{\ln(x)} > e^{\sqrt{\ln(x)}}$ für alle $x > e$ gilt. Da aber $\int_e^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ divergiert, muss folglich auch das obige Integral divergieren.

Bitte wenden!

5. (★★) Betrachten Sie die folgenden Figuren, die beide aus den selben zwei homogenen Rechtecken zusammengesetzt sind und sich nur in der Platzierung des rechten (liegenden) Rechtecks unterscheiden (dieses ist um d nach unten versetzt):



Seien $x_1, y_1, x_2, y_2 > 0$. Welche Aussagen über die Schwerpunkte S_1 (der linken Figur) und S_2 (der rechten Figur) sind wahr?

√ (a) Die x-Koordinaten von S_1 und S_2 stimmen überein.

(b) Die Länge x_2 (bedeutet Ausdehnung in x-Richtung) des rechten (liegenden) Rechtecks kann so gewählt werden, dass die y-Koordinaten von S_1 und S_2 übereinstimmen.

(c) Die Differenz der y-Koordinaten von S_1 und S_2 beträgt d.

Die erste Aussage ist wahr, da das Rechteck nur entlang der y-Achse bewegt wird und die Formel zur Bestimmung der x-Koordinate des Schwerpunkts,

$$x_S = \frac{\int xG(x)\,\mathrm{d}x}{\int G(x)\,\mathrm{d}x},$$

nur die jeweilige Ausdehnung in y-Richtung, nicht aber deren Lage, verwendet.

Intuitiv lassen sich die nächsten beiden Aussagen folgendermassen entkräften: Falls überdies auch die y-Koordinaten übereinstimmten, so wären die beiden Schwerpunkte ident, was absurd anmutet, also sollte die zweite Aussage falsch sein. Da der Schwerpunkt nicht nur vom rechten, sondern auch vom linken Rechteck abhängt, sollte die Masse des linken Rechtecks die Bewegung des Schwerpunkts entlang der y-Richtung in Relation zur Bewegung des rechten Rechtecks verlangsamen – dass der Schwerpunkt also im gleichen Ausmass wie das Rechteck bewegt wird scheint unlogisch, womit die dritte Aussagen widerlegt wäre.

Nun validieren wir unsere mathematische Intuition. Nehmen wir dazu an, dass die linke untere Ecke des linken (stehenden) Rechtecks im Ursprung platziert ist und (wie schon in der Abbildung beschriftet), dass das linke Rechteck eine Länge von x_1 und eine Höhe von y_1, das rechte Rechteck eine Länge von x_2 und eine Höhe von y_2 hat. In der Folge berechnen wir die y-Koordinate von S_1. Es gilt

$$H_1(y) = \begin{cases} x_1 & \text{für } 0 \leq y < y_1 - y_2, \\ x_1 + x_2 & \text{für } y_1 - y_2 \leq y \leq y_1 \end{cases}$$

und folglich

$$y_{S_1} = \frac{\int_0^{y_1} yH_1(y)\,\mathrm{d}y}{\int_0^{y_1} H_1(y)\,\mathrm{d}y} = \frac{x_1y_1^2 + x_2(2y_1y_2 - y_2^2)}{2(x_1y_1 + x_2y_2)}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Auf ähnliche Weise erhalten wir die y-Koordinate von S_2. Diesmal gilt

$$H_2(y) = \begin{cases} x_1 & \text{für } 0 \leq y < y_1 - y_2 - d, \\ x_1 + x_2 & \text{für } y_1 - y_2 - d \leq y \leq y_1 - d, \\ x_1 & \text{für } y_1 - d < y \leq y_1 \end{cases}$$

und folglich

$$y_{S_2} = \frac{\int_0^{y_1} y H_2(y)\,\mathrm{d}y}{\int_0^{y_1} H_2(y)\,\mathrm{d}y} = \frac{x_1 y_1^2 + x_2(2(y_1 - d)y_2 - y_2^2)}{2(x_1 y_1 + x_2 y_2)}.$$

Daraus ist sofort ersichtlich, dass die y-Koordinaten nur übereinstimmen, falls $d = 0$ gilt. Dies ist aber ausgeschlossen. Ausserdem ist die Differenz der y-Koordinaten gleich

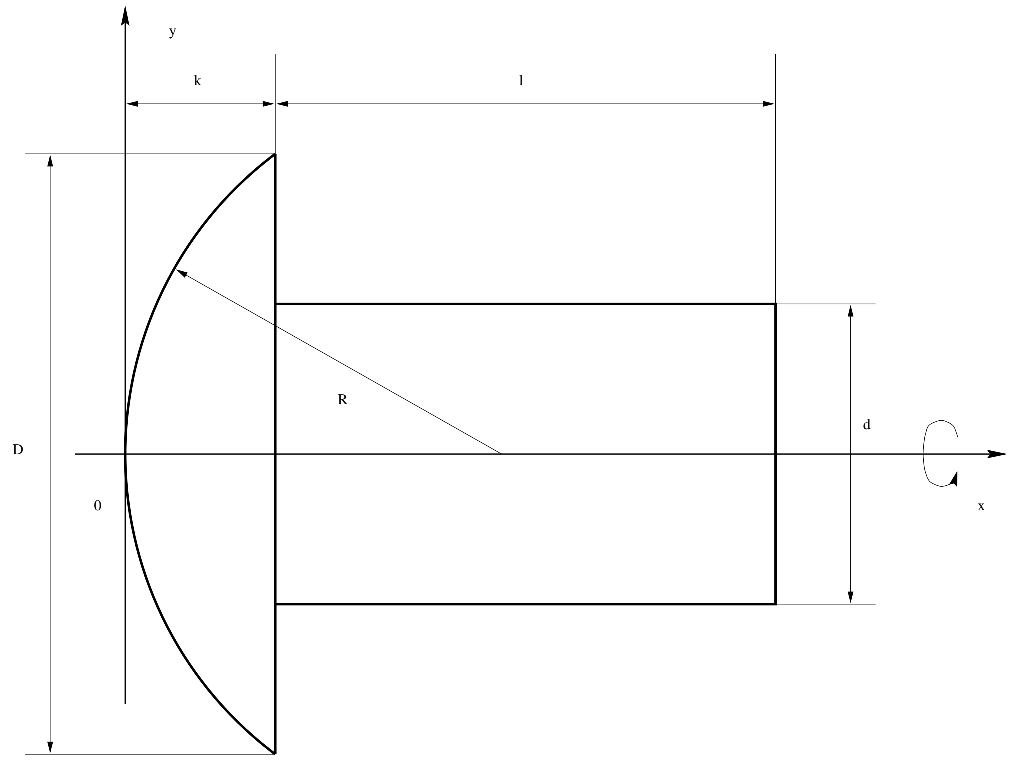
$$y_1 - y_2 = \frac{x_2 y_2 d}{x_1 y_1 + x_2 y_2} = \left(1 - \frac{x_1 y_1}{x_1 y_1 + x_2 y_2}\right) d < d,$$

wie gewünscht.

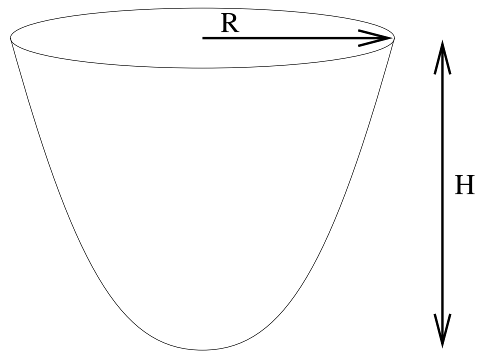
Bitte wenden!

6. (★★☆)

a) Berechnen Sie den Schwerpunkt des in der Figur dargestellten, homogenen Rotationskörpers, dem Halbrundniet. Es sind $d = 16\text{mm}$, $D = 28\text{mm}$, $k = 11.5\text{mm}$ und $l = 80\text{mm}$.



b) Betrachten Sie das Rotationsparaboloid, das durch Rotation der Kurve $z = ax^2$ um die z-Achse gegeben ist:



Auf welcher Höhe liegt der Körperschwerpunkt?

Lösung:

a) Dank dem Satz von Pythagoras haben wir

$$(R-k)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 = R^2$$

Siehe nächstes Blatt!

und somit

$$R = \frac{D^2}{8k} + \frac{k}{2}.$$

Das Volumen ist

$$\begin{aligned}
V &= \pi \left[\int_0^k \left(\sqrt{R^2 - (R-x)^2} \right)^2 dx + \int_k^{k+l} \left(\frac{d}{2} \right)^2 dx \right] \\
&= \pi \left[\int_0^k (2Rx - x^2)\, dx + \int_k^{k+l} \frac{d^2}{4}\, dx \right] = \pi \Big(Rk^2 - \frac{k^3}{3} + \frac{d^2 l}{4} \Big) \\
&= \pi \Big(\frac{D^2 k}{8} + \frac{k^3}{6} + \frac{d^2 l}{4} \Big) = \frac{\pi}{24} \left(3D^2 k + 4k^3 + 6d^2 l \right).
\end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen sind die y- und z-Komponenten des Schwerpunktes $y_S = z_S = 0$. Für die x-Komponente bekommen wir

$$\begin{aligned}
x_s &= \frac{1}{V} \pi \left[\int_0^k x(2Rx - x^2)\, dx + \int_k^{k+l} x \left(\frac{d}{2} \right)^2 dx \right] \\
&= \frac{\pi}{V} \left(\frac{2Rk^3}{3} - \frac{k^4}{4} + \frac{d^2}{8} \left((k+l)^2 - k^2 \right) \right) \\
&= \frac{\pi}{V} \left(\frac{D^2 k^2}{12} + \frac{k^4}{3} - \frac{k^4}{4} + \frac{d^2 kl}{4} + \frac{d^2 l^2}{8} \right) \\
&= \frac{\pi}{24V} \left(2D^2 k^2 + 2k^4 + 6d^2 kl + 3d^2 l^2 \right) = \frac{2D^2 k^2 + 2k^4 + 3d^2 l(2k + l)}{3D^2 k + 4k^3 + 6d^2 l} \\
&\approx 42\text{mm}.
\end{aligned}$$

(Bemerkung: Bedenken Sie, dass die Angabe von mehr Nachkommastellen (etwa 42.1166 mm) hier nicht sinnvoll ist, denn die Grössen d, D und l sind auch nicht genauer als mit zwei Dezimalstellen angegeben.)

b) Die Kurve $z = ax^2$ wird um die z-Achse gedreht. Für den Radius gilt dann $r^2 = x^2 + y^2$ und für die Höhe $z = ar^2$.
Schnittfläche bei z: $F(z) = \pi r^2 = \pi \frac{z}{a}$
Volumenelement bei z: $dV = F(z) dz = \pi \frac{z}{a} dz$
Der Schwerpunkt liegt auf der z-Achse mit Höhe h.

$$\begin{aligned}
h &= \frac{1}{V} \int_0^{aR^2} z dV, \qquad \text{wobei } V = \int_0^{aR^2} dV \\
&= \frac{1}{V} \int_0^{aR^2} \frac{\pi}{a} z^2 dz = \frac{1}{V} \frac{\pi}{3a} z^3 \Big|_0^{aR^2} = \frac{1}{V} \frac{\pi}{3a} a^3 R^6 = \frac{1}{V} \frac{\pi}{3} a^2 R^6 \\
V &= \int_0^{aR^2} dV = \int_0^{aR^2} \frac{\pi}{a} z dz = \frac{\pi}{2a} z^2 \Big|_0^{aR^2} = \frac{\pi}{2} aR^4 \\
\Rightarrow h &= \frac{2}{\pi} a^{-1} R^{-4} \frac{\pi}{3} a^2 R^6 = \frac{2}{3} aR^2 = \frac{2}{3} H
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

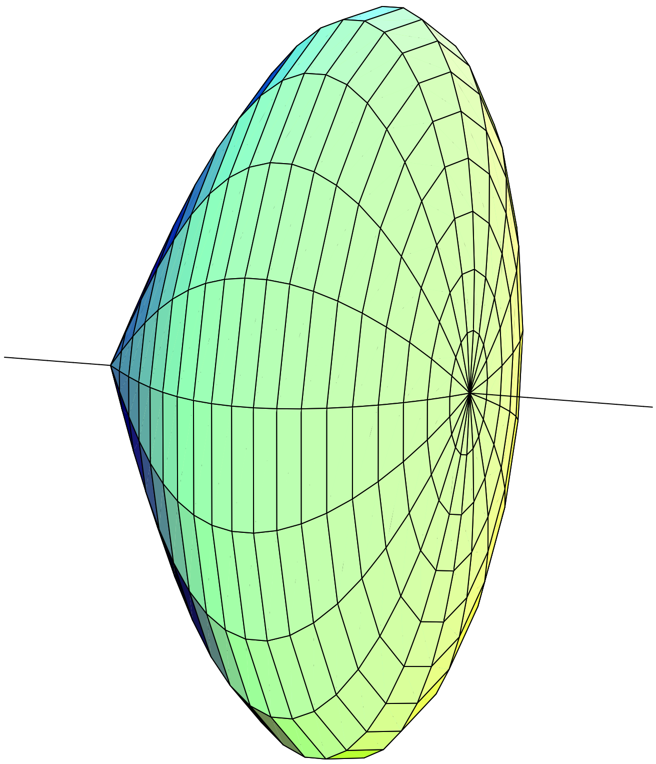
7. (★★½)

a) Eine dünne homogene Quadratplatte (Länge der Quadratseite s, Masse pro Flächeneinheit σ) rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine Diagonale. Wie gross ist die kinetische Energie der Platte?

b) Das Flächenstück zwischen der x-Achse und dem durch die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos t \\ y(t) &= \sin(2t) \end{aligned} \qquad (\text{für } 0 \leq t \leq \tfrac{\pi}{2})$$

gegebenen Kurvenbogen wird um die x-Achse rotiert. Dadurch entsteht ein zwiebelförmiger, homogener Körper mit homogener Dichte $\varrho = 1$. Berechnen Sie das Trägheitsmoment bezüglich der x-Achse.



Lösung:

a) Für die in der Zeichnung (siehe nächste Seite) oben rechts liegende Kante der Platte gilt die Gleichung $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\, s - x$. In einem Streifen der Breite dx liegt also die kleine Masse

$$dm = 2y\sigma\, dx = 2\sigma \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\, s - x \right) dx.$$

Daraus erhält man als Anteil der kinetischen Energie

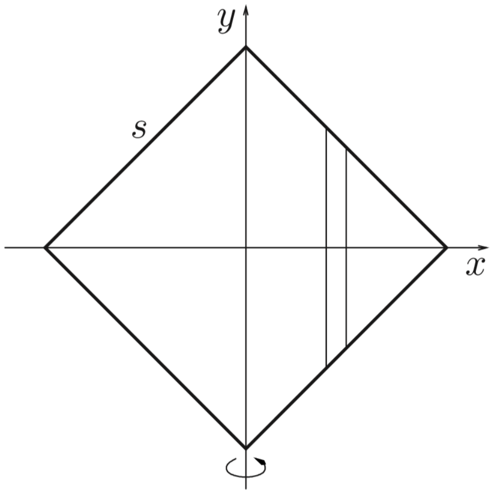
$$dT = \frac{1}{2}\, v^2\, dm = \frac{1}{2}\, \omega^2 x^2\, dm = \sigma \omega^2 x^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\, s - x \right) dx\,.$$

Siehe nächstes Blatt!

Die gesamte kinetische Energie ist folglich

$$T = 2 \int\limits_0^{\frac{s}{\sqrt{2}}} \sigma\omega^2 x^2 \left(\frac{s}{\sqrt{2}} - x \right) dx = 2\sigma\omega^2 \left(\frac{s}{\sqrt{2}} \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Bigg|_0^{\frac{s}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{24}\, \sigma\omega^2 s^4.$$

Den Faktor 2 benötigen wir, um auch die linke Hälfte der Platte zu berücksichtigen.



b) Wir bestimmen zuerst eine explizite Darstellung der Kurve. Es ist

$$y = \sin(2t) = 2 \sin t \cos t = 2x\,\sqrt{1 - x^2}$$

(ein Stück einer Lemniskate bzw. Lissajous-Figur). Das Trägheitsmoment berechnet sich dann gemäss Buch, Kapitel III.12, wie folgt:

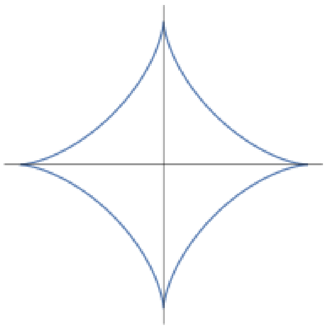
$$\begin{aligned}
\Theta &= \frac{1}{2}\,\pi \int_0^1 \left(2x\,\sqrt{1-x^2}\right)^4 dx = \frac{\pi}{2} \int_0^1 16x^4(1-x^2)^2\, dx \\
&= 8\pi \int_0^1 \left(x^4 - 2x^6 + x^8\right) dx = 8\pi \left[\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \right]_0^1 \\
&= 8\pi \Big(\frac{1}{5} - \frac{2}{7} + \frac{1}{9} \Big) = \frac{64\pi}{315}.
\end{aligned}$$

Alternative: Das Trägheitsmoment einer dünnen Kreisscheibe mit Radius r ist $\frac{1}{2}\pi r^4$. Zerschneiden wir die Zwiebel in solche Scheiben vom Radius $y(t)$ und Dicke $dx = \dot{x}(t)dt$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\Theta &= \frac{1}{2}\,\pi \int_0^{\pi/2} y(t)^4 |\dot{x}(t)|\, dt = \frac{1}{2}\,\pi \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin^4(2t)}_{= 16\cos^4 t \sin^4 t = 16\cos^4 t\,(1-\cos^2 t)^2} \sin t\, dt \\
&= 8\pi \int_0^{\pi/2} \cos^4 t\; (1 - \cos^2 t)^2 \sin t\, dt \\
&\underset{du = -\sin t dt}{\overset{u=\cos t}{=}} 8\pi \int_1^0 u^4(1-u^2)^2\,(-1)\, du = 8\pi \Big(\frac{1}{5} - \frac{2}{7} + \frac{1}{9} \Big) = \frac{64\pi}{315}.
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

8. (★½) Es sei die *Astroide* durch die folgende Parameterdarstellung gegeben:



$$x(t) = a\cos^3 t$$
$$y(t) = a\sin^3 t, \qquad \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Dabei ist $a > 0$ eine feste Zahl. Berechnen Sie in Abhängigkeit von a die Oberfläche dieses Rotationskörpers der entsteht, wenn die Astroide um die x-Achse gedreht wird;

Lösung:

Gemäss der Formel für Oberflächenintegrale erhalten wir

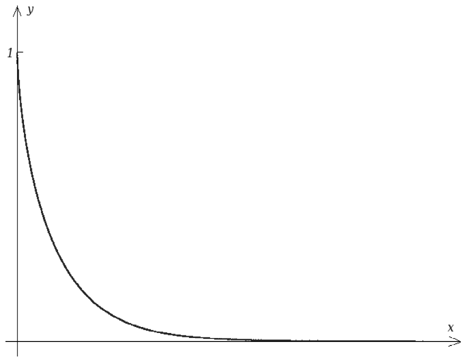
$$\begin{aligned} O &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi y(t)\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}\, dt = 12\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t\, dt \\ &= \frac{12}{5}\pi a^2 \left[\sin^5 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{12}{5}\pi a^2. \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

9. (★★½) Es sei $T \in (0, \infty)$ eine positive reelle Zahl. Die Kurve K in der (x, y)-Ebene sei durch die Parametrisierung

$$s \longmapsto (x(s), y(s)) = \left(\int_0^s \sqrt{1 - e^{-2u}}\,\mathrm{d}u,\, e^{-s} \right), \quad s \in [0, T],$$

gegeben.



Bestimmen Sie den Oberflächeninhalt der durch Rotation von K um die x-Achse erzeugten Rotationsfläche in $\mathbb{R}^3$ in Abhängigkeit von T.

Lösung: Für die Berechnung des Oberflächeninhaltes wenden wir die Formel

$$F = 2\pi \int_0^T y(s) \sqrt{\dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s)^2}\,\mathrm{d}s$$

an. Die Ableitungen von x und y sind:

$$\begin{aligned} \dot{x}(s) &= \sqrt{1 - e^{-2s}} \quad \text{(Hauptsatz der Infinitesimalrechnung)} \\ \dot{y}(s) &= -e^{-s} \end{aligned}$$

Also ist $\sqrt{\dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s^2)} = \sqrt{1 - e^{-2s} + e^{-2s}} = 1$. Mit diesen Daten berechnen wir jetzt den Flächeninhalt.

$$\begin{aligned} F &= 2\pi \int_0^T e^{-s} \cdot 1\,\mathrm{d}s = 2\pi \int_0^T e^{-s}\,\mathrm{d}s \\ &= -2\pi\, e^{-s}\Big|_0^T = 2\pi \left(1 - e^{-T}\right). \end{aligned}$$