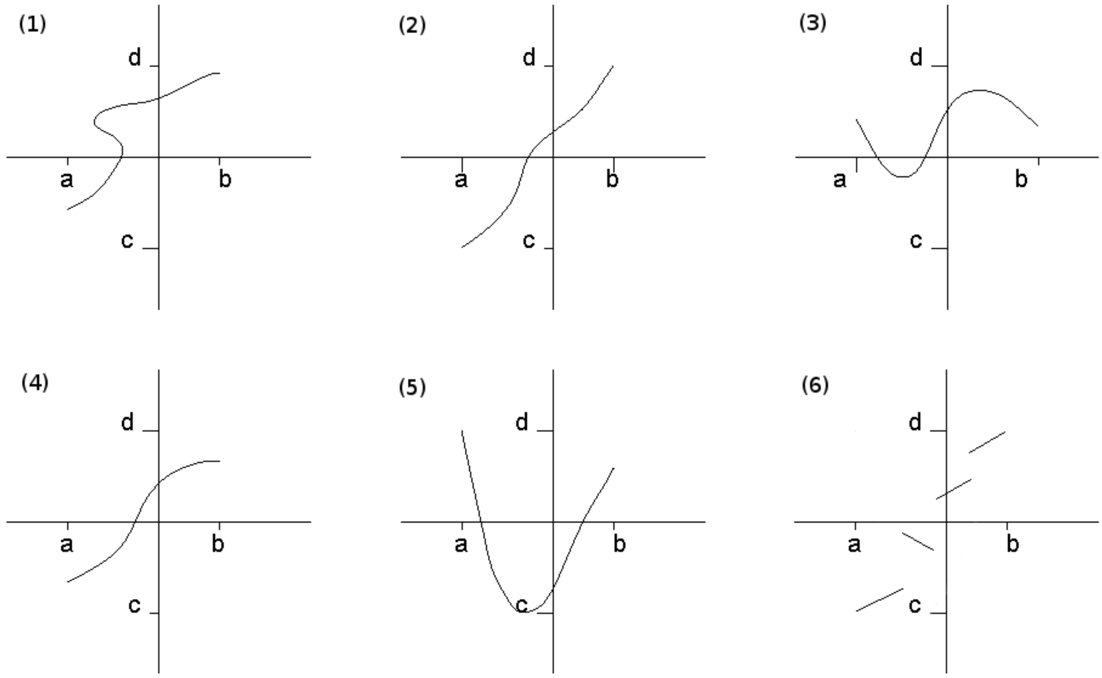
Lösung - Serie 3

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. (★) Welche der folgenden Bilder beschreiben den Graph einer injektiven Funktion $[a, b] \to [c, d]$?



(a) (1)

$\surd$ (b) (2)

(c) (3)

$\surd$ (d) (4)

(e) (5)

$\surd$ (f) (6)

(1) ist kein Graph einer Funktion, weil verschiedene y-Koordinaten mit derselben x-Koordinate möglich sind. In (3) und (5) sind verschiedene x-Koordinaten mit derselben y-Koordinate möglich; in diesen Fällen ist die Funktion also nicht injektiv. Für (2), (4) und (6) tritt dieses Problem nicht auf; deshalb sind sie Graphen zweier injektiver Funktionen auf einem geeigneten Definitionsintervall.

2. (★⯨) Es sei die Funktion $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ definiert durch $f(x) = \ln(x^2+1)$, wobei der Logarithmus ln zur Basis e ist. Welche Gleichung beschreibt die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$?

(a) Die Umkehrfunktion existiert nicht.

(b) $f^{-1}(x) = \ln(x^2 - 1)$

(c) $f^{-1}(x) = e^{x^2+1}$

(d) $f^{-1}(x) = e^{x-1}$

√ (e) $f^{-1}(x) = \sqrt{e^x - 1}$

Die Funktion ist im Definitionsbereich $[0,\infty)$ streng monoton wachsend, also injektiv. Des Weiteren ist sie surjektiv, also umkehrbar. Sei $y = \ln(x^2+1)$. Lösen wir nach x auf, so erhalten wir $x = \sqrt{e^y - 1}$. Vertauschen von x und y führt schließlich zu $f^{-1}(x) = \sqrt{e^x - 1}$.

3. (★★⯨) Es sei $f(x) = \cos(x^2)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und sei $D = [\sqrt{\pi}, \sqrt{2\pi}]$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

√ (a) Die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ ist injektiv.

(b) Das Bild von D unter f, also $\{f(x) : x \in D(f)\}$, ist gleich $[0,1]$.

√ (c) Die Funktion $g : \left[0, \sqrt{1/2}\right] \to [\sqrt{\pi}/2, \sqrt{\pi}/\sqrt{2}]$ gegeben durch $g(x) = \sqrt{\arccos x}$ ist die Umkehrfunktion von der Funktion $f\colon [\sqrt{\pi}/2, \sqrt{\pi}/\sqrt{2}] \to \left[0, \sqrt{1/2}\right],\ x \mapsto f(x)$.

Die Funktion f ist auf D streng monoton steigend und folglich injektiv. Weiters ist $\cos(\pi) = -1$, also ist -1 im Bild von D unter f enthalten und dieses Bild kann somit nicht gleich $[0,1]$ sein. Da $f(g(x)) = \cos(\sqrt{\arccos x}^2) = \cos(\arccos x) = x$ für $x \in [0, \sqrt{1/2}]$ und das Bild von $[\sqrt{\pi}/2, \sqrt{\pi}/\sqrt{2}]$ unter f gleich $[0, 1/\sqrt{2}]$ ist, ist g in der Tat die Umkehrfunktion von f im gefragten Intervall.

Bitte wenden!

4. (★☆) Seien $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, so dass $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es gelte ausserdem:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Welche Aussage ist richtig?

(a) Dann ist g sicher eine Asymptote von f wenn $x \to \infty$

√ (b) g kann eine Asymptote von f sein wenn $x \to \infty$, muss aber nicht.

(c) Dann ist g sicher keine Asymptote von f wenn $x \to \infty$.

Mit $f(x) = g(x) = x^2+1$ erfüllen die beiden Funktionen alle Bedingungen und sind Asymptoten von einander, d.h. die dritte Aussage ist sicher falsch. Wenn wir hingegen $g(x) = x^2 + 2$ setzen und $f(x) = x^2+1$ lassen, strebt weiterhin $f(x)/g(x) \to 1$ wenn $x \to \infty$, aber $f(x)-g(x) \to -1$, d.h. g ist keine Asymptote von f. Also ist auch die erste Aussage falsch: Nicht jedes solche g ist eine Asymptote von f. Die zweite Aussage ist richtig: g kann eine Asympote von f sein, aber das muss nicht zwingend gelten.

5. (★★) Es sei die Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{e^{2x}+1}{e^x+1}.$$

Welche der folgenden Funktionen ist eine Asymptote von f für $x \to \infty$?

(a) $g(x) = e^x$

(b) $g(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$

√ (c) $g(x) = e^x - 1$

(d) $g(x) = e^x - e^{-x}$

(e) $g(x) = e^{-x}$

Es gilt

$$f(x) = \frac{e^{2x}+1}{e^x+1} = e^x - 1 + 2/(e^x+1).$$

Terme, die hier für $x \to \infty$ nicht gegen Null konvergieren, sind Terme, die in der Funktion g vorkommen. Also $g(x) = e^x - 1$.

Siehe nächstes Blatt!

6. (★★) Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{array}{ll} f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & x \mapsto 2x-6 \\ f_2\colon \mathbb{R} \to [0,\infty), & x \mapsto |x| \\ f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & x \mapsto \min\{x^2-9, 0\} \\ f_4\colon \mathbb{R}\setminus\{3\} \to \mathbb{R}, & x \mapsto \frac{x+1}{f_1(x)}. \end{array}$$

a) Untersuchen Sie alle Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

b) Skizzieren Sie auf dem Intervall $[-5,5]$ die Funktionen $g := f_3 - f_1$,

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f_3(x) - f_1(x),$$

und $h := f_2 \circ g$,

$$h\colon \mathbb{R} \to [0,\infty), \qquad x \mapsto f_2(g(x)).$$

c) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f_4^{-1}\colon W(f_4) \to \mathbb{R}\setminus\{3\}$.
Hinweis: Sie müssen $W(f_4) = \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$ hier nicht explizit berechnen.

Lösung:

a) In der Vorlesung wurde für eine Funktion f Injektivität definiert als

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

das ist logisch äquivalent zu

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

- f_1 ist bijektiv:

$$2x_1 - 6 = 2x_2 - 6 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2 \qquad f_1 \text{ ist injektiv}$$

$$y \in \mathbb{R} \text{ beliebig, wähle } x = \frac{y+6}{2} \;\Rightarrow\; f_1(x) = y \qquad f_1 \text{ ist surjektiv}$$

- f_2 ist nicht bijektiv:

$$\text{(z.B.) für } x_1 = -1, x_2 = 1 \text{ ist } f_2(x_1) = f_2(x_2) \qquad f_2 \text{ ist nicht injektiv}$$

$$y \in [0,\infty) \text{ beliebig, wähle z.B. } x = -y \;\Rightarrow\; f_2(x) = y \qquad f_2 \text{ ist surjektiv}$$

- f_3 ist nicht bijektiv:

$$\text{(z.B.) für } x_1 = -5, x_2 = 8 \text{ ist } f_3(x_1) = f_3(x_2) \qquad f_3 \text{ ist nicht injektiv}$$

$$\text{(z.B.) für } y = 2 \text{ gibt es kein } x \in \mathbb{R}, \text{ so dass } f_3(x) = y \qquad f_3 \text{ ist nicht surjektiv}$$

- Wir beginnen, indem wir $f_4(x)$ umformen:

$$f_4(x) = \frac{x+1}{2x-6} = \frac{1}{2}\frac{x+1}{x-3} = \frac{1}{2}\frac{(x-3)+4}{x-3} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4}{x-3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{x-3}.$$

  Damit erkennt man leichter:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{2}{x_1-3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{x_2-3} \quad &\Rightarrow \quad \frac{2}{x_1-3} = \frac{2}{x_2-3} \\ &\Rightarrow \quad x_1 - 3 = x_2 - 3 \Rightarrow x_1 = x_2 \quad f_4 \text{ ist injektiv} \end{aligned}$$

$$\frac{2}{x-3} \neq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\setminus\{3\}, \text{ so dass } \frac{1}{2} \notin W(f_4) \qquad f_4 \text{ ist nicht surjektiv}$$

  Somit ist f_4 nicht bijektiv.

Bitte wenden!

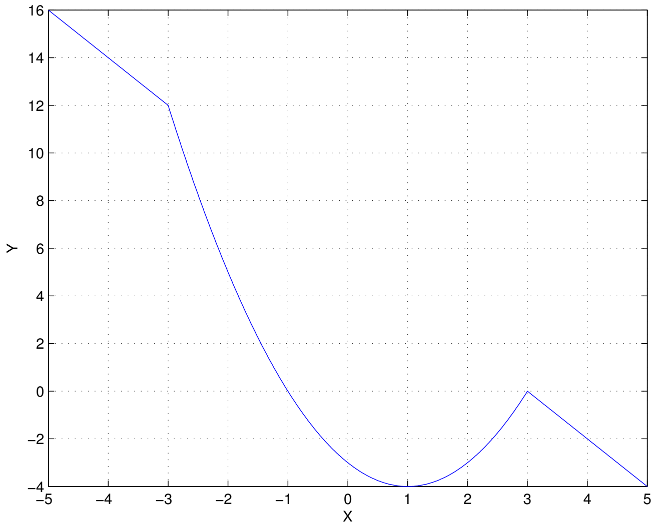


Abbildung 1: Aufgabe 4. b) Funktion g

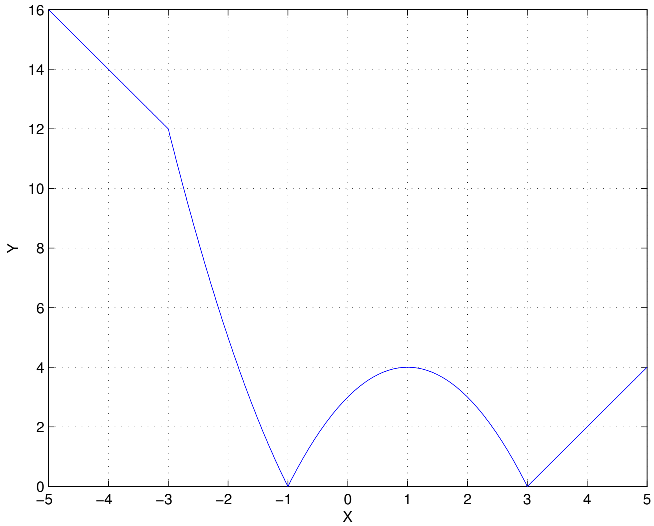


Abbildung 2: Aufgabe 4. b) Funktion h

b) Siehe Abbildungen 1 und 2.

Bemerkung: Da f_2 die Betragsfunktion ist, erhält man den Graphen von h, indem man den Teil des Graphen von g, welcher unterhalb der x-Achse liegt, an der x-Achse spiegelt.

Siehe nächstes Blatt!

c) Wir müssen die Gleichung $y = f_4(x)$ nach x auflösen:

$$\begin{aligned} y = \frac{x+1}{2x-6} \quad &\Leftrightarrow \quad x+1 = 2xy - 6y \\ &\Leftrightarrow \quad 6y+1 = 2xy - x \\ &\Leftrightarrow \quad 6y+1 = x(2y-1) \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{6y+1}{2y-1}. \end{aligned}$$

Jetzt vertauschen wir noch die Variablen x und y und erhalten:

$$f_4^{-1} : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R} \setminus \{3\}, \qquad x \mapsto \frac{6x+1}{2x-1}.$$

7. (★★½) Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen f_i je ein möglichst grosses Intervall I, so dass $f_i\colon I \to \mathbb{R}$ injektiv ist und $-3\pi \in I$. Was ist das Bild von I unter f_i?

a) $f_1(x) = x^4 + x^2$

b) $f_2(x) = e^x - 5$

c) $f_3(x) = \tan(x)$

Lösung:

a) f_1 ist gerade und somit symmetrisch bezüglich der y-Achse. Also gilt $I \subset (-\infty, 0]$ oder $I \subset [0, \infty)$. Die Bedingung $-3\pi \in I$ ergibt $I \subset (-\infty, 0]$. Ausserdem ist f_1 strikt monoton fallend auf $(-\infty, 0]$ und deshalb dort injektiv. Daraus folgt, dass $I = (-\infty, 0]$.

Wir bestimmen das Bild von I unter f_1. Es gilt $f_1(0) = 0$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = \infty$. Da f_1 stetig ist, folgt $f_1(I) = [0, \infty)$.

b) Die Exponentialfunktion e^x ist überall injektiv. Die Funktion $e^x - 5$ ist eine Translation nach unten von e^x und deshalb auch auf ganz $\mathbb{R}$ injektiv.

Das Bild der Exponentialfunktion ist $(0, \infty)$. Also gilt $f_2(I) = (-5, \infty)$.

c) Bekanntlich ist $\tan(x)$ auf $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ definiert und injektiv auf jedem Intervall der Form $\left(\pi k - \frac{\pi}{2}, \pi k + \frac{\pi}{2}\right)$ für $k \in \mathbb{Z}$. Da $-3\pi \in I$ gelten muss, haben wir $I = \left(-3\pi - \frac{\pi}{2}, -3\pi + \frac{\pi}{2}\right)$.

Ausserdem haben wir $\tan(I) = \mathbb{R}$.

8. (★★) Bestimmen Sie bei jeder der folgenden Funktionen, welche für alle reellen Zahlen $t > 0$ definiert sind, jeweils eine Asymptote der Form $at + b$ für $t \to +\infty$:

a) $f(t) = \frac{t}{t+\sqrt{t}}$;

b) $g(t) = \sqrt{4t^2 + 3}$;

c) $h(t) = 3t + \cos(1/t)$;

d) $i(t) = \ln(1 + e^t)$.

Bitte wenden!

Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen und die dazugehörigen Asymptoten.

Lösung:

a) Da
$$\frac{t}{t+\sqrt{t}} - 1 = \frac{-1}{\sqrt{t}+1} \to 0$$
für $t \to \infty$, ist die Asymptote die Gerade $t \mapsto 1$.

b) Da
$$\sqrt{4t^2+3} - 2t = \frac{3}{\sqrt{4t^2+3}+2t} \to 0$$
für $t \to \infty$, ist die Asymptote die Gerade $t \mapsto 2t$.

c) Da $\cos(1/t) \to \cos(0) = 1$ für $t \to \infty$, ist die Asymptote die Gerade $t \mapsto 3t+1$.

d) Da
$$\log(1+e^t) - t = \log(1+e^t) - \log(e^t) = \log(1+e^{-t}) \to \log(1) = 0$$
für $t \to \infty$, ist die Asymptote die Gerade $t \mapsto t$.

9. (★★⯪) In der Modellierung von idealem Populationswachstum unter der Bedingung von beschränkten Ressourcen taucht folgende Funktion $f\colon [0,\infty) \to (0,\infty)$ auf:
$$f(t) := G \cdot \frac{1}{1 + e^{-k \cdot G \cdot t}\left(\frac{G}{m_0} - 1\right)}$$

Dabei beschreibt $G > 0$ die maximale Populationsgrösse, die durch die Ressourcenbeschränktheit erreicht werden kann, $k > 0$ beschreibt die Wachstumsrate und $m_0 > 0$ ist eine beliebig grosse Startpopulation zum Zeitpunkt $t = 0$.

a) Bestimmen Sie eine möglichst einfache Asymptote von f für $t \to \infty$.

b) Für welche m_0 und G kann der Definitionsbereich von f auf $\mathbb{R}$ ausgedehnt werden?

c) Bestimmen Sie für die in b) bestimmten m_0 und G eine möglichst einfache Asymptote von f für $t \to -\infty$.

d) Ist die Funktion $f\colon [0,\infty) \to (0,\infty)$ (strikt) monoton? Beantworten Sie die Frage in Abhängigkeit von m_0 und G.

Bemerkung: Wenn es Ihnen hilft, rechnen Sie zuerst mit $k = G = 1$ und stellen Sie erst danach auf beliebige $k, G > 0$ um.

Lösung:

Siehe nächstes Blatt!

a) Eine Asymptote von f für $t \to \infty$ ist $g(t) = G$. Wir rechnen

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} f(t) - g(t) &= \lim_{t\to\infty} G \cdot \frac{1}{1 + e^{-k\cdot G\cdot t}\left(\frac{G}{m_0} - 1\right)} - G \\ &= \frac{G}{\lim\limits_{t\to\infty}\left(1 + e^{-k\cdot G\cdot t}\left(\frac{G}{m_0} - 1\right)\right)} - G \\ &= \frac{G}{1 + \lim\limits_{t\to\infty}\left(e^{-k\cdot G\cdot t}\right)\left(\frac{G}{m_0} - 1\right)} - G \\ &= \frac{G}{1 + 0\cdot\left(\frac{G}{m_0} - 1\right)} - G = 0.\end{aligned}$$

b) Falls $G < m_0$ ist $\frac{G}{m_0} - 1 < 0$. Da das Bild von $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(t) = e^{-k\cdot G\cdot t}$ ganz $(0, \infty)$ ist, gibt es in diesem Fall ein $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $1 + e^{-k\cdot G\cdot t_0}\left(\frac{G}{m_0} - 1\right) = 0$ und $f(t_0)$ ist nicht definiert.

Falls $G \geq m_0$, ist $\frac{G}{m_0} - 1 \geq 0$ und da die Exponentialfunktion nur positive Werte annimt, ist ist der Nenner von $f(t)$ niemals 0. Also kann f auf ganz $\mathbb{R}$ definiert werden.

c) Falls $m_0 = G$ ist $\frac{G}{m_0} - 1 = 0$, also ist f in diesem Fall konstant gleich G und eine Asymptote für $t \to -\infty$ ist $g(t) = G$. Andernfalls ist $\frac{G}{m_0} - 1 > 0$ und wir haben $e^{-k\cdot G\cdot t}\left(\frac{G}{m_0} - 1\right) \to \infty$ für $t \to -\infty$, da $e^{-x} \to \infty$ für $x \to -\infty$. Da der Zähler von $f(t)$ konstant ist, gilt also $f(t) \to 0$ für $t \to -\infty$ und somit ist $g(t) = 0$ eine Asymptote.

d) Falls $m_0 = G$ ist $f(t) = G$, also ist f monoton steigend und monoton fallend, aber weder strikt monoton steigend noch strikt monoton fallend.

Falls $G < m_0$, ist $e^{-k\cdot G\cdot t}\left(\frac{G}{m_0} - 1\right)$ strikt monoton steigend, da $e^{-k\cdot G\cdot t}$ strikt monoton fallend ist und $\frac{G}{m_0} - 1 < 0$. Also ist der Nenner strikt monoton steigend. Da für alle $t \in [0, \infty)$ gilt, dass $f(t) > 0$, folgt, dass f strikt monoton fällt.

Falls $G > m_0$ gilt analog, dass f strikt monoton steigt.