

Lösung Serie 4

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. (★★★) Sei $z := 2 \exp\left(\frac{\pi}{6}i\right) \cdot (5\sqrt{3} + b \cdot i)$. Für welches $b \in \mathbb{R}$ ist z eine reelle Zahl?

- (a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
- (b) $\sqrt{3}$
- (c) $\frac{1}{5\sqrt{3}}$
- (d) $5\sqrt{3}$
- ✓ (e) Keines von diesen.

Es gilt

$$\begin{aligned} z &= 2 \exp\left(\frac{\pi}{6}i\right) \cdot (5\sqrt{3} + b \cdot i) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \cdot (5\sqrt{3} + bi) \\ &= 15 + b\sqrt{3}i + 5\sqrt{3}i - b = (15 - b) + i \cdot (b\sqrt{3} + 5\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Die Zahl ist reell, wenn der Imaginärteil verschwindet, und dies ist für $b = -5$ der Fall, welches nicht auftaucht.

Bitte wenden!

2. (★★★) Sei $z := \sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$. Dann ist z^6 gleich

- (a) $64(i\sqrt{2} - \sqrt{2})$.
- (b) $-32(i\sqrt{2} - \sqrt{2})$.
- ✓ (c) $64 \exp(i\frac{3}{4}\pi)$.
- (d) $64 \exp(i\frac{3}{2}\pi)$.

Um uns die Arbeit zu erleichtern, verwenden wir, dass $z^6 = (z^2)^3$. Wir berechnen zuerst z^2 mit Hilfe der binomischen Formel,

$$\begin{aligned} z^2 &= \left(\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}} \right)^2 = \left(\sqrt{2 + \sqrt{2}} \right)^2 + 2i\sqrt{2 + \sqrt{2}}\sqrt{2 - \sqrt{2}} + \left(i\sqrt{2 - \sqrt{2}} \right)^2 \\ &= 2 + \sqrt{2} + 2i\sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} - 2 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Wegen $|z^2| = \sqrt{8 + 8} = 4$ und $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}$ erhalten wir mit Hilfe der Eulerschen Identität die Polarformdarstellung

$$z^2 = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4 \exp(i\frac{\pi}{4}).$$

Daraus folgt schliesslich

$$z^6 = (z^2)^3 = \left(4 \exp(i\frac{\pi}{4})\right)^3 = 64 \exp(i\frac{3}{4}\pi).$$

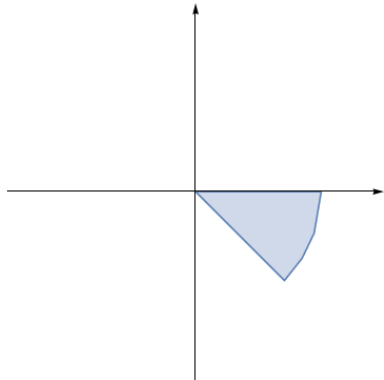
Siehe nächstes Blatt!

3. (★★) Es sei

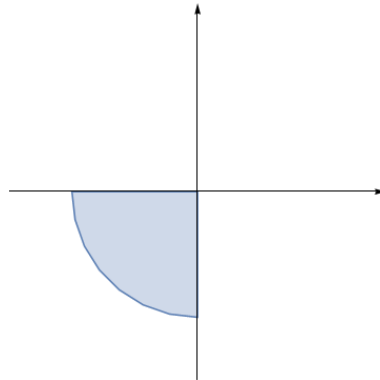
$$A := \left\{ r e^{i\varphi} : r \in [0, 1], \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4} \right] \right\} \subset \mathbb{C}$$

und es sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $z \mapsto z^2$. Welche der folgenden Mengen entspricht $f(A)$?

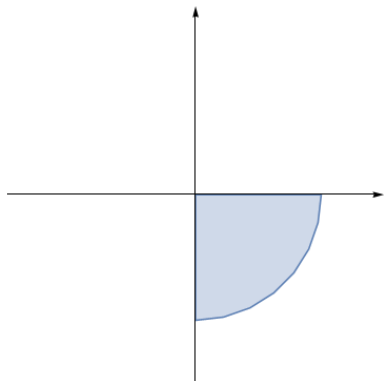
a)



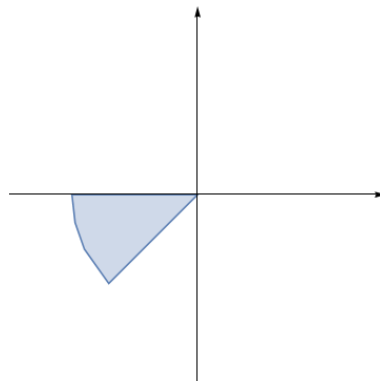
b)



c)



d)



(a) a)

✓ (b) b)

(c) c)

(d) d)

Es gilt

$$f(re^{i\varphi}) = re^{i\varphi} re^{i\varphi} = r^2 e^{i2\varphi}.$$

Beachte $f([0, 1]) = [0, 1]$, d.h. die Funktion $x \mapsto x^2$ ist surjektiv auf $[0, 1]$. Weil $2\left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right] = \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$ ist Antwort b) richtig.

Bitte wenden!

4. (★★) Was ist $(1+i)^{2000}$?

(a) $\sqrt{2}e^{500\pi i}$

Falsch. Der Betrag von $(1+i)^{2000}$ muss $\sqrt{2}^{2000}$ und damit viel grösser als $\sqrt{2}$ sein.

(b) -2^{1000}

Falsch. Aber 2^{1000} wäre richtig gewesen. Es gilt $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ und folglich $(1+i)^{2000} = \sqrt{2}^{2000}(e^{i\frac{\pi}{4}})^{2000} = 2^{1000}e^{500\pi i} = 2^{1000}(e^{2\pi i})^{250} = 2^{1000}1^{250} = 2^{1000}$.

✓ (c) $(2i)^{1000}$

Richtig. Es gilt $(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 2i$ und deshalb

$$(1+i)^{2000} = ((1+i)^2)^{\frac{2000}{2}} = (2i)^{1000}.$$

Beachte, dass zudem

$$(2i)^{1000} = 2^{1000}i^{1000} = 2^{1000}(i^4)^{250} = 2^{1000}1^{250} = 2^{1000}$$

gilt.

(d) $2^{1000}e^{\frac{\pi i}{4}}$

Falsch. Das Argument von $(1+i)^{2000}$ muss bis auf ein Vielfaches von 2π mit $2000 \cdot \frac{\pi}{4}$ übereinstimmen.

(e) 2^{2000}

Falsch. Der Betrag ist zu gross.

Siehe nächstes Blatt!

5. (★★★)

- a) Gegeben seien die komplexe Zahlen $z_1 = 4(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i \sin(\frac{5\pi}{6}))$ und $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$. Berechnen Sie Betrag und Argument von $z = \frac{z_1}{z_2}$.
- b) Skizzieren Sie in der komplexen Ebene den Bereich, der die komplexen Zahlen z enthält, für welche folgende zwei Bedingungen gelten:
- $\arg((1+i)^2) \leq \arg(z^2) \leq \arg(-7)$,
 - $\left| \frac{1+2\sqrt{2}i}{\exp(i\pi)} \right| \leq \left| \frac{z}{(1+i)^2} \right| \leq |3+4i|$.

Lösung

a) Es gilt $z_1 = 4(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i \sin(\frac{5\pi}{6})) = 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

Für z_2 merken wir, dass $z_2 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos(\frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{3})\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Also gilt

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4e^{i\frac{5\pi}{6}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = 2e^{i(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3})} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i.$$

Somit gilt es $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = 2$ und $\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \frac{\pi}{2}$.

- b) Wir bestimmen zuerst alle Zahlen $z = re^{i\varphi}$, die die Bedingung i) erfüllen. Sei $w = z^2$, $w = se^{i\theta}$ mit $\theta \in (-\pi, \pi]$. Dann ist z eine quadratische Wurzel von w und somit gilt $z = \sqrt{s}e^{i\frac{\theta}{2}}$ oder $z = \sqrt{s}e^{i(\frac{\theta}{2} + \pi)}$, das heisst, $\varphi = \frac{\theta}{2}$ oder $\varphi = \frac{\theta}{2} + \pi$.

Es gilt:

$$(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad \text{deshalb} \quad \arg((1+i)^2) = \frac{\pi}{2}.$$

Die Zahl -7 befindet sich auf der negativen reellen Achse und somit gilt $\arg(-7) = \pi$.

Also folgt aus Bedingung i): $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$. Und so:

$$\frac{\pi}{4} \leq \varphi = \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{5\pi}{4} \leq \varphi = \frac{\theta}{2} + \pi \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Bedingung i) wird somit von allen Zahlen $z = re^{i\varphi}$ mit $\varphi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}]$ erfüllt.

Nun betrachten wir Bedingung ii).

Es gilt:

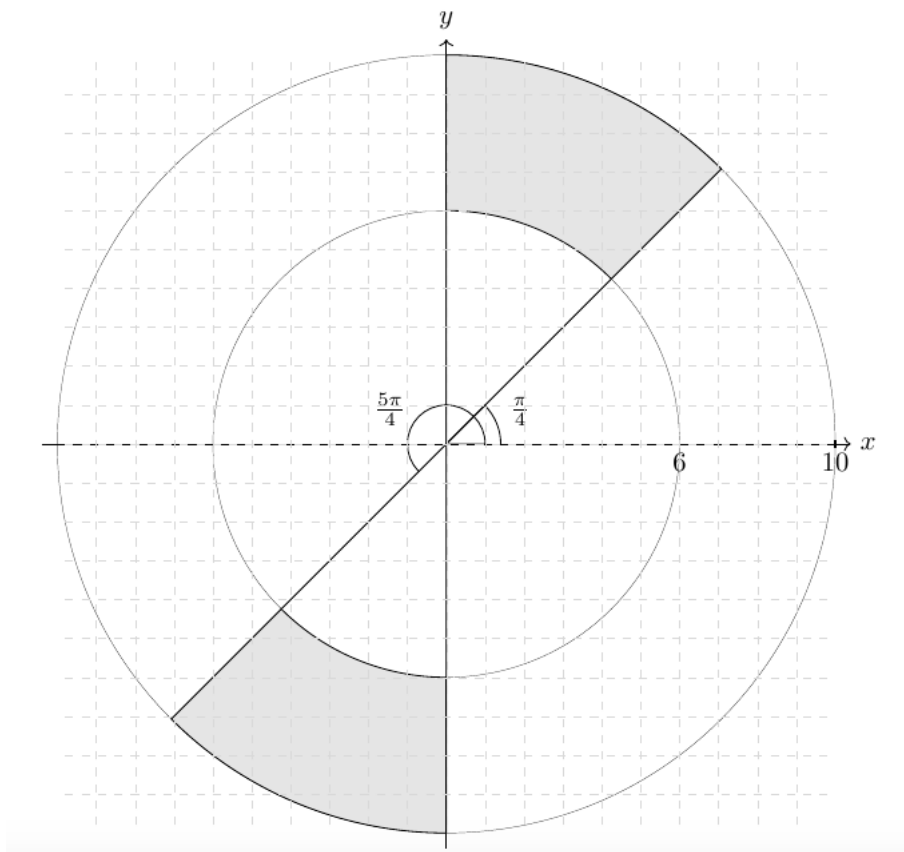
- $|3+4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
- $\left| \frac{1+2\sqrt{2}i}{e^{i\pi}} \right| = \frac{|1+2\sqrt{2}i|}{|e^{i\pi}|} = \frac{\sqrt{1+8}}{1} = 3$.
- $\left| \frac{z}{(1+i)^2} \right| = \frac{|z|}{|2i|} = \frac{|z|}{2}$.

Somit muss es gelten

$$3 \leq \frac{|z|}{2} \leq 5 \quad , \quad \text{das heisst,} \quad 6 \leq |z| \leq 10.$$

Der Bereich, der die komplexen Zahlen z enthält, für welche die Bedingungen i) und ii) gelten ist:

Bitte wenden!



6. (★★★)

a) Bestimmen Sie die kleinste Zahl $C \in \mathbb{R}$, so dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$, $|w| < 1$ gilt $|w + z| < C$.

b) Die Zahlen

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} \quad \text{und} \quad z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{15\pi}{16}}$$

seien beides Lösungen der Gleichung $z^n = c$. Bestimmen Sie das kleinstmögliche $n \in \mathbb{N}$ sowie $c \in \mathbb{C}$.

Lösung:

a) Seien $z, w \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und $|w| < 1$. Dann gilt

$$|z + w| \leq |z| + |w| < 1 + 1 = 2.$$

Wir möchten nun zeigen, dass für $0 < D < 2$ existieren es $z, w \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$, $|w| < 1$ und $|z + w| = D$.

Nämlich, betrachte $z = w = \frac{D}{2}$. Dann

$$|z| = |w| = \frac{D}{2} < \frac{2}{2} = 1$$

und

$$|z + w| = 2 \frac{D}{2} = D.$$

Siehe nächstes Blatt!

Dies zeigt, dass $C = 2$ die kleinste solche Zahl ist.

b) Da z_1 und z_2 Lösungen der Gleichung $z^n = c$ sind, gilt es $z_1^n = c = z_2^n$, das heisst

$$\sqrt{2}^n e^{i\frac{5\pi}{16}n} = \sqrt{2}^n e^{-i\frac{15\pi}{16}n}.$$

Das impliziert:

$$\begin{aligned} \frac{5\pi}{16}n &= -\frac{15}{16}\pi n + k2\pi \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow \pi \left(\frac{5n}{16} + \frac{15n}{16} - 2k \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{20n}{16} - 2k &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{5}{8}n. \end{aligned}$$

Da k ganzzahlig sein muss, folgt es $n \geq 8$.

Für $n = 8$ erhalten wir

$$c = (\sqrt{2})^8 e^{i\frac{5\pi}{16}8} = 16e^{i\frac{5\pi}{2}} = 16i.$$

7. (★★★) Zeigen Sie die folgenden trigonometrische Beziehungen:

a) $\cos(3x) = \cos^3(x) - 3\sin^2(x)\cos(x).$

b) $\sin(3x) = 3\sin(x)\cos^2(x) - \sin^3(x).$

Wir lösen Teilaufgaben **a)** und **b)** gleichzeitig.

Aus der Eulerschen Formel haben wir $e^{i3x} = \cos(3x) + i\sin(3x)$. Ausserdem gilt es mit den Eigenschaften der Exponentialfunktion: $e^{i3x} = (e^{ix})^3$. Also:

$$\begin{aligned} \cos(3x) + i\sin(3x) &= e^{i3x} = (e^{ix})^3 \\ &= (\cos(x) + i\sin(x))^3 \\ &= (\cos(x) + i\sin(x))(\cos(x) + i\sin(x))^2 \\ &= (\cos(x) + i\sin(x))(\cos^2(x) + 2i\cos(x)\sin(x) - \sin^2(x)) \\ &= \cos^3(x) - 3\sin^2(x)\cos(x) + i(3\sin(x)\cos^2(x) - \sin^3(x)). \end{aligned}$$

Durch Vergleich von Real- und Imaginärteil erhalten wir die gewünschte Beziehungen.

Anderer Lösungsweg:

Wir berechnen zuerst $\cos(2x)$ und $\sin(2x)$.

Aus der Eulerschen Formel und aus den Eigenschaften der Exponentialfunktion folgt

$$\cos(2x) + i\sin(2x) = e^{i2x} = (e^{ix})^2 = (\cos(x) + i\sin(x))^2 = \cos^2(x) + i2\sin(x)\cos(x) - \sin^2(x).$$

Durch Vergleichen von Imaginär- und Reellteil erhalten wir

Bitte wenden!

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ \sin(2x) &= 2 \sin(x) \cos(x).\end{aligned}$$

Ähnlicherweise haben wir

$$\begin{aligned}\cos(3x) + i \sin(3x) &= e^{i3x} = e^{i(2x+x)} = e^{i2x} e^{ix} \\ &= (\cos(2x) + i \sin(2x)) (\cos(x) + i \sin(x)) \\ &= \cos^3(x) - 3 \sin^2(x) \cos(x) + i (3 \sin(x) \cos^2(x) - \sin^3(x)).\end{aligned}$$

Dies impliziert

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos^3(x) - 3 \sin^2(x) \cos(x) \\ \sin(3x) &= 3 \sin(x) \cos^2(x) - \sin^3(x).\end{aligned}$$