

## Lösung - Serie 5

### MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. (★) Es sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- (a)  $f$  ist stetig  $\iff$   $f$  ist differenzierbar.
- (b)  $f$  ist stetig  $\implies$   $f$  ist differenzierbar.
- ✓ (c)  $f$  ist stetig  $\iff$   $f$  ist differenzierbar.
- (d) Es gibt keinen derartigen Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

Jede differenzierbare Funktion ist stetig. Aber nicht jede stetige Funktion ist differenzierbar, zum Beispiel  $x \mapsto |x|$  bei  $x = 0$ .

2. (★) Wie lautet die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion

$$f: [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x-2},$$

an der Stelle  $x = 6$ ?

- (a)  $y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$ .
- ✓ (b)  $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ .
- (c)  $y = \frac{1}{2}x - 1$ .
- (d)  $y = x - 4$ .
- (e) Keine der obigen Antworten ist richtig.

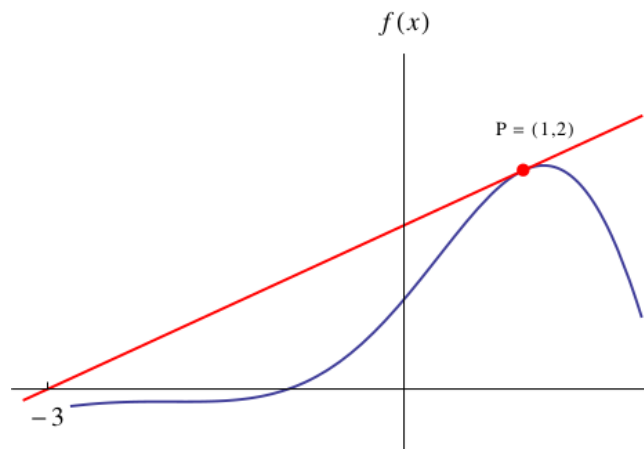
Die Tangente ist durch eine Gleichung der Form  $y = ax + b$  gegeben, wobei  $a = f'(6)$  ist und  $b$  dadurch bestimmt ist, dass die Tangente den Punkt  $(6, f(6))$  enthält. Es gilt

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

und damit  $a = f'(6) = \frac{1}{4}$ . Aus  $(6, f(6)) = (6, 2)$  folgt, dass  $b$  die Gleichung  $2 = \frac{6}{4} + b$  erfüllt, dass also  $b = \frac{1}{2}$  gilt. Also ist die Gleichung in (b) die richtige.

**Bitte wenden!**

3. (★) Im folgenden Bild ist die rote Gerade im Punkt  $P$  tangential an die blaue Kurve, die der Graph einer Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist. Welchen Wert hat die Ableitung  $f'$  an der Stelle 1?



- (a) 2

Falsch.

- ✓ (b)  $\frac{1}{2}$

Richtig! Der Wert  $f'(1)$  ist die Steigung  $m$  der Geraden, welche die Tangente an den Graphen von  $f$  im Punkt  $(1, f(1))$  definiert. Die Steigung ist:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - 0}{1 - (-3)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

- (c)  $-\frac{2}{3}$

Falsch.

- (d)  $-2$

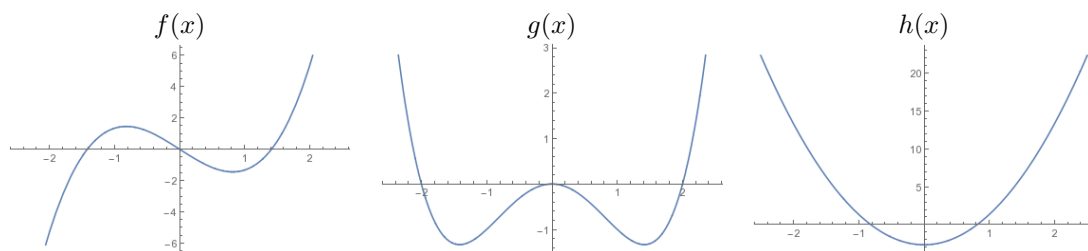
Falsch.

- (e) Keiner dieser Werte ist korrekt.

Falsch.

**Siehe nächstes Blatt!**

4. (★★) Gegeben seien die folgenden Graphen von Funktionen



Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a)  $f' = g$

Falsch. Wenn  $f' = g$  gelten würde, dann müsste die Ableitung von  $f$  in 0 verschwinden, da  $g$  dort eine Nullstelle hat. Man sieht jedoch, dass dies nicht der Fall ist.

✓ (b)  $g' = f$

Richtig!  $f$  hat drei Nullstellen  $x_0 < x_1 < x_2$  und an diesen verschwindet offenbar die Ableitung von  $g$ . Ausserdem ist  $g$  auf  $(-\infty, x_0)$  monoton fallend, auf  $(x_0, x_1)$  monoton steigend, auf  $(x_1, x_2)$  monoton fallend und auf  $(x_2, \infty)$  monoton steigend. Auch das passt zu dem Verhalten von  $f$ , welche negativ auf  $(-\infty, x_0)$  ist, positiv auf  $(x_0, x_1)$  ist, negativ auf  $(x_1, x_2)$  ist und positiv auf  $(x_2, \infty)$  ist. All das sind Indizien dafür, dass die Aussage korrekt ist.

✓ (c)  $f' = h$

Richtig!  $h$  hat zwei Nullstellen  $x_0 < x_1$  und an diesen verschwindet offenbar die Ableitung von  $f$ . Ausserdem ist  $f$  monoton steigend auf  $(-\infty, x_0)$ , monoton fallend auf  $(x_0, x_1)$  und monoton steigend auf  $(x_1, \infty)$ . Auch das passt zum Verhalten von  $h$ , welche positiv auf  $(-\infty, x_0)$  ist, negativ auf  $(x_0, x_1)$  ist und positiv auf  $(x_1, \infty)$  ist. All das sind Indizien dafür, dass die Aussage korrekt ist.

(d)  $h' = g$

Falsch. Wenn  $h' = g$  gelten würde, dann müsste die Ableitung von  $h$  in 2 verschwinden, da  $g$  dort eine Nullstelle besitzt. Man sieht jedoch, dass dies nicht der Falls ist.

✓ (e)  $g'' = h$

Richtig! Das folgt aus  $g' = f$  und  $f' = h$ .

(f)  $f'' = g$

Falsch. Wenn  $f'' = g$  wäre, dann müsste  $g$  für alle  $x < 0$  negativ sein; stellt man sich nämlich vor, man würde auf dem Graphen von  $f$  mit dem Auto entlang fahren, dann lenkt man bis zum Punkt  $(0, 0)$  nach rechts, d.h.  $f''(x) < 0$  für alle  $x < 0$ . Jedoch ist  $g$  negativ auf dem Intervall  $(-2, 0)$ .

**Bitte wenden!**

5. (★★★) Es sei das Gebiet

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \operatorname{Im} \left( \frac{z+2}{iz} \right) > 0 \right\}$$

gegeben.

- a) Skizzieren Sie das Gebiet  $B$  in der komplexen Ebene.
- b) Das Polynom  $z^3 + \frac{7}{2}z^2 + 7z + 6$  hat eine komplexe Nullstelle mit Realteil gleich  $-1$ . Bestimmen Sie alle Nullstellen dieses Polynoms. Wie lauten die Nullstellen in Polarform?
- c) Welche dieser Nullstellen befinden sich in  $B$ ?

**Lösung:**

a) Für  $z = x + iy$  gilt

$$\begin{aligned} \frac{z+2}{iz} &= \frac{x+iy+2}{i(x+iy)} = \frac{x+iy+2}{ix-y} = \frac{(-ix-y)(x+iy+2)}{(-ix-y)(ix-y)} \\ &= \frac{-ix^2+xy-2ix-xy-iy^2-2y}{x^2+y^2} \\ &= \frac{-2y}{x^2+y^2} + \frac{-2x-x^2-y^2}{x^2+y^2}i. \end{aligned}$$

Das Gebiet  $B$  ist damit gegeben durch

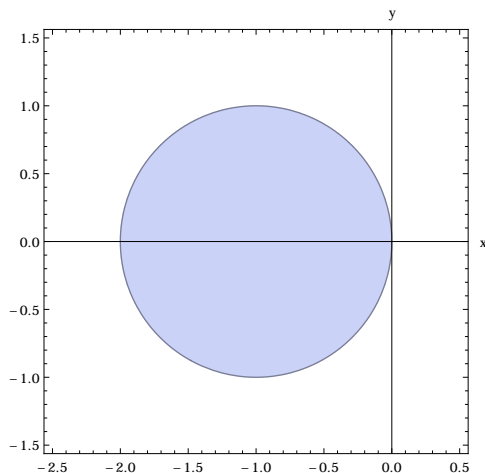
$$\operatorname{Im} \left( \frac{z+2}{iz} \right) = \frac{-2x-x^2-y^2}{x^2+y^2} > 0.$$

Umgeformt ergibt das

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left( \frac{z+2}{iz} \right) &= \frac{-2x-x^2-y^2}{x^2+y^2} > 0 \\ \Leftrightarrow -2x-x^2-y^2 &> 0 \\ \Leftrightarrow 0 &> x^2+2x+y^2 \\ \Leftrightarrow 0 &> (x+1)^2-1+y^2 \\ \Leftrightarrow 1 &> (x+1)^2+y^2. \end{aligned}$$

Das Gebiet  $B$  ist also das Innere des Kreises mit Mittelpunkt  $(-1, 0)$  und Radius 1. Der Rand gehört nicht zur Menge.

**Siehe nächstes Blatt!**



b) Wir bemerken zuerst, dass  $-1$  keine Nullstelle des Polynoms ist und folglich die Nullstelle mit Realteil  $-1$  nicht reell ist. Da solche Nullstellen für Polynome mit reellen Koeffizienten immer in komplex konjugierten Paaren auftreten, hat das Polynom zwei Nullstellen von der Form

$$z_{1,2} = -1 \pm iy.$$

Somit müssen wir vom Polynom einen Faktor der Form

$$(z + 1 + iy)(z + 1 - iy) = z^2 + 2z + 1 + y^2$$

abspalten können. Polynomdivision ergibt

$$\begin{array}{r}
 (z^3 + \frac{7}{2}z^2 + 7z + 6) : (z^2 + 2z + 1 + y^2) = z + \frac{3}{2} \\
 -(z^3 + 2z^2 + (1 + y^2)z) \\
 \hline
 \frac{3}{2}z^2 + (6 - y^2)z + 6 \\
 -(\frac{3}{2}z^2 + 3z + \frac{3}{2}(1 + y^2)) \\
 \hline
 (3 - y^2)z + (\frac{9}{2} - \frac{3}{2}y^2)
 \end{array}$$

Es bleibt also der Rest

$$(3 - y^2)z + \frac{9}{2} - \frac{3y^2}{2}$$

übrig und dieser muss gleich 0 sein. Es ergibt sich also  $y = \pm\sqrt{3}$  und die drei Nullstellen lauten in Normalform

$$z_1 = -1 + \sqrt{3}i, \quad z_2 = -1 - \sqrt{3}i, \quad z_3 = -\frac{3}{2}.$$

In Polarform lauten diese somit

$$z_1 = 2e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad z_2 = 2e^{\frac{-2\pi i}{3}}, \quad z_3 = \frac{3}{2}e^{\pi i}.$$

c) In Teilaufgabe a) haben wir gesehen, dass alle Punkte  $z = x + iy$  in  $B$  die Ungleichung

$$1 > (x + 1)^2 + y^2$$

erfüllen müssen. Es folgt  $z_1 \notin B$ ,  $z_2 \notin B$ ,  $z_3 \in B$ .

**Bitte wenden!**

6. (★★★) Finden Sie in der komplexen Ebene alle Lösungen der folgenden Gleichungen. Geben Sie die Lösungen jeweils auch in Polarform an.

a)  $z^6 = -8$

b)  $z^5 - 8(-1 - i\sqrt{3})z = 0$

c)  $3z^3 - 12z^2 + pz + q = 0$ , wobei  $z_1 = 3 + i$  eine Lösung der Gleichung sein soll und  $p, q$  reelle Koeffizienten sind, welche noch bestimmt werden müssen.

**Lösung:**

a) Die Gleichung lässt sich als  $z^6 = (\sqrt{2})^6 e^{i\pi}$  darstellen, also sind die Lösungen in Polarform

$$z_k = \sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{2\pi}{6})}, \quad k = 0, \dots, 5;$$

also  $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$ ,  $\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{6}}$ ,  $\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ,  $\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{6}}$ ,  $\sqrt{2}e^{i\frac{9\pi}{6}}$ ,  $\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{6}}$ .

In Normalform lauten die Lösungen

$$z_0 = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$z_1 = i\sqrt{2},$$

$$z_2 = \sqrt{2} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$z_3 = \sqrt{2} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$z_4 = -i\sqrt{2},$$

$$z_5 = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b) Wir klammern zuerst aus:

$$z^5 - 8(-1 - i\sqrt{3})z = z(z^4 - 8(-1 - i\sqrt{3})) = 0.$$

Offensichtlich ist also  $z = 0$  eine Lösung. Für den anderen Faktor erhalten wir mit der Polardarstellung  $z = r e^{i\varphi}$  die Gleichung

$$z^4 = r^4 e^{4i\varphi} = 8(-1 - i\sqrt{3}) = 16e^{i\frac{4\pi}{3}}.$$

Die weiteren Lösungen lauten damit in Polarform

$$z_k = 2e^{i(\frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{4})}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

In Normalform sind die Lösungen der Gleichung also

$$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3},$$

$$z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3} + i,$$

$$z_2 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}} = -1 - i\sqrt{3},$$

$$z_3 = 2e^{i\frac{11\pi}{6}} = \sqrt{3} - i;$$

und  $z_4 = 0$ .

**Siehe nächstes Blatt!**

- c) Da sämtliche Koeffizienten reell sind, muss nach einem Satz aus der Vorlesung neben  $z_1$  auch  $z_2 = \overline{z_1}$  eine Nullstelle des Polynoms sein. Damit folgt, dass  $(z - z_1)(z - z_2)$  ein Faktor des Polynoms ist. Nach dem Hauptsatz der Algebra gibt es auch noch eine weitere Nullstelle  $z_3$ , welche reell sein muss (Nullstellen sind reell oder treten in komplex konjugierten Paaren auf; aber es sind in diesem Fall nur drei). Das ergibt:

$$\begin{aligned} 3z^3 - 12z^2 + pz + q &= 3(z - (3 + i))(z - (3 - i))(z - z_3) \\ \iff 3z^3 - 12z^2 + pz + q &= 3(z^2 - 6z + 10)(z - z_3) \\ \iff 3z^3 - 12z^2 + pz + q &= 3z^3 - (18 + 3z_3)z^2 + (30 + 18z_3)z - 30z_3. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir zur Bestimmung der drei Unbekannten  $p, q, z_3$  die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 12 &= 18 + 3z_3 &\Rightarrow z_3 &= -2 \\ p &= 30 + 18z_3 &\Rightarrow p &= -6 \\ q &= -30z_3 &\Rightarrow q &= 60 \end{aligned}$$

Zusammengefasst sind die jeweiligen Normal- und Polarformen der Lösungen

$$\begin{aligned} z_1 &= 3 + i = \sqrt{10}e^{i \arctan(1/3)}, \\ z_2 &= 3 - i = \sqrt{10}e^{-i \arctan(1/3)}, \\ z_3 &= -2 = 2e^{i\pi}. \end{aligned}$$

7. (★★) Berechnen Sie  $f': D(f) \rightarrow \mathbb{R}$  für

- |  |   |
|--|---|
| a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x \sin(x);$  | b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^2+3};$   |
| c) $f: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\sin x};$   | d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-x};$  |
| e) $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (\tan x)^2;$  | f) $f: \mathbb{R}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{\ln x};$   |
| g) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases};$ | h) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$ |

\*Zeigen Sie, dass die Ableitung der Funktion aus Teilaufgabe **h**) im Punkt  $x = 0$  nicht stetig ist.

**Lösung:**

- a)  $\frac{d}{dx} (x \sin x) = \sin x + x \cos x$  (Produktregel)
- b)  $\frac{d}{dx} ((x^2 + 3)^{-1}) = (-1)(x^2 + 3)^{-2} \cdot 2x = \frac{-2x}{(x^2 + 3)^2}$  (Kettenregel)
- c)  $\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\sin x} \right) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$  (Kettenregel oder Quotientenregel)
- d)  $\frac{d}{dx} (e^{-x}) = -e^{-x}$  (Kettenregel)
- e)  $\frac{d}{dx} ((\tan x)^2) = 2(\tan x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = 2 \frac{\sin x}{\cos^3 x}$  (Kettenregel, Abl. von  $\tan x$ )
- f)  $\frac{d}{dx} (\sqrt{\ln x}) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$  (Kettenregel und Ableitung von  $\ln x$ )

**Bitte wenden!**

g) Es sei  $x \neq 0$ . Es gilt  $\frac{d}{dx} \left( e^{-\frac{1}{x^2}} \right) = 2 \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$  (Kettenregel).

Weiter gilt

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{e^{\frac{1}{h^2}}},$$

weil

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{\frac{1}{h^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = 0$$

und

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^{\frac{1}{h^2}}} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-1}{e^{\frac{1}{h^2}}} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = 0,$$

wobei wir die Substitution  $x = \frac{1}{h}$  gemacht haben, gilt  $f'(0) = 0$  (weil der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert übereinstimmen).

h) Es sei  $x \neq 0$ . Wir berechnen

$$\frac{d}{dx} \left( x^2 \sin \left( \frac{1}{x} \right) \right) = 2x \sin \left( \frac{1}{x} \right) - \cos \left( \frac{1}{x} \right) \quad (\text{Kettenregel und Produktregel}).$$

Weiter gilt

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \left( \frac{1}{h} \right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \left( \frac{1}{h} \right).$$

Weil  $|\sin(x)| \leq 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\left| h \sin \left( \frac{1}{h} \right) \right| \leq |h| \cdot 1 = |h|$$

und deshalb lässt sich zeigen, dass

$$\left| \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \left( \frac{1}{h} \right) \right| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| h \sin \left( \frac{1}{h} \right) \right| \leq \lim_{h \rightarrow 0} |h| = 0.$$

Wir haben also gezeigt  $|f'(0)| \leq 0$  und somit gilt  $f'(0) = 0$ . Fasst man alles zusammen erhält man:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \left( \frac{1}{x} \right) - \cos \left( \frac{1}{x} \right) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Im folgenden zeigen wir, dass die Funktion  $f'$  im Punkt  $x = 0$  nicht stetig ist. Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 2x \sin \left( \frac{1}{x} \right) - \cos \left( \frac{1}{x} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin \left( \frac{1}{x} \right) - \lim_{x \rightarrow 0} \cos \left( \frac{1}{x} \right) = 0 - \lim_{x \rightarrow 0} \cos \left( \frac{1}{x} \right).$$

Der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \left( \frac{1}{x} \right)$  existiert nicht. Um dass zu zeigen muss man zwei Folgen  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  finden so dass  $a_n \rightarrow 0$ ,  $b_n \rightarrow 0$  mit  $n \rightarrow +\infty$  und

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \left( \frac{1}{a_n} \right) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \left( \frac{1}{b_n} \right).$$

In der Tat, es sei  $(a_n)$  die Folge gegeben durch

$$a_n := \frac{1}{n2\pi}$$

**Siehe nächstes Blatt!**



und es sei  $(b_n)$  die Folge gegeben durch

$$b_n := \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n2\pi}.$$

Beachte, dass  $a_n \rightarrow 0$  und  $b_n \rightarrow 0$  falls  $n \rightarrow +\infty$ . Wir berechnen

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{a_n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(n2\pi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

und

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{b_n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} + n2\pi\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0;$$

der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$  existiert also nicht und die Funktion  $f'$  ist nicht stetig an der Stelle  $x = 0$ .